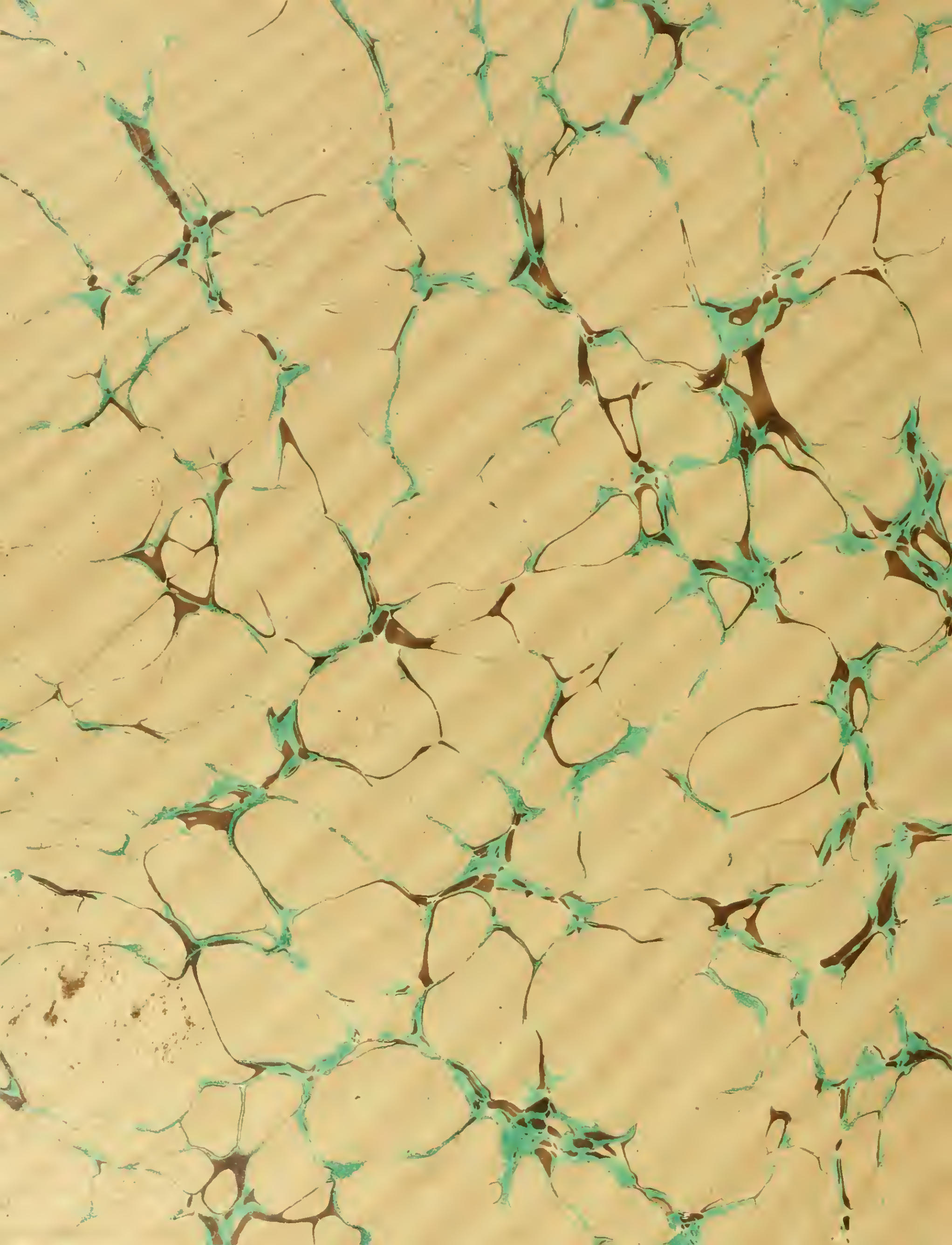
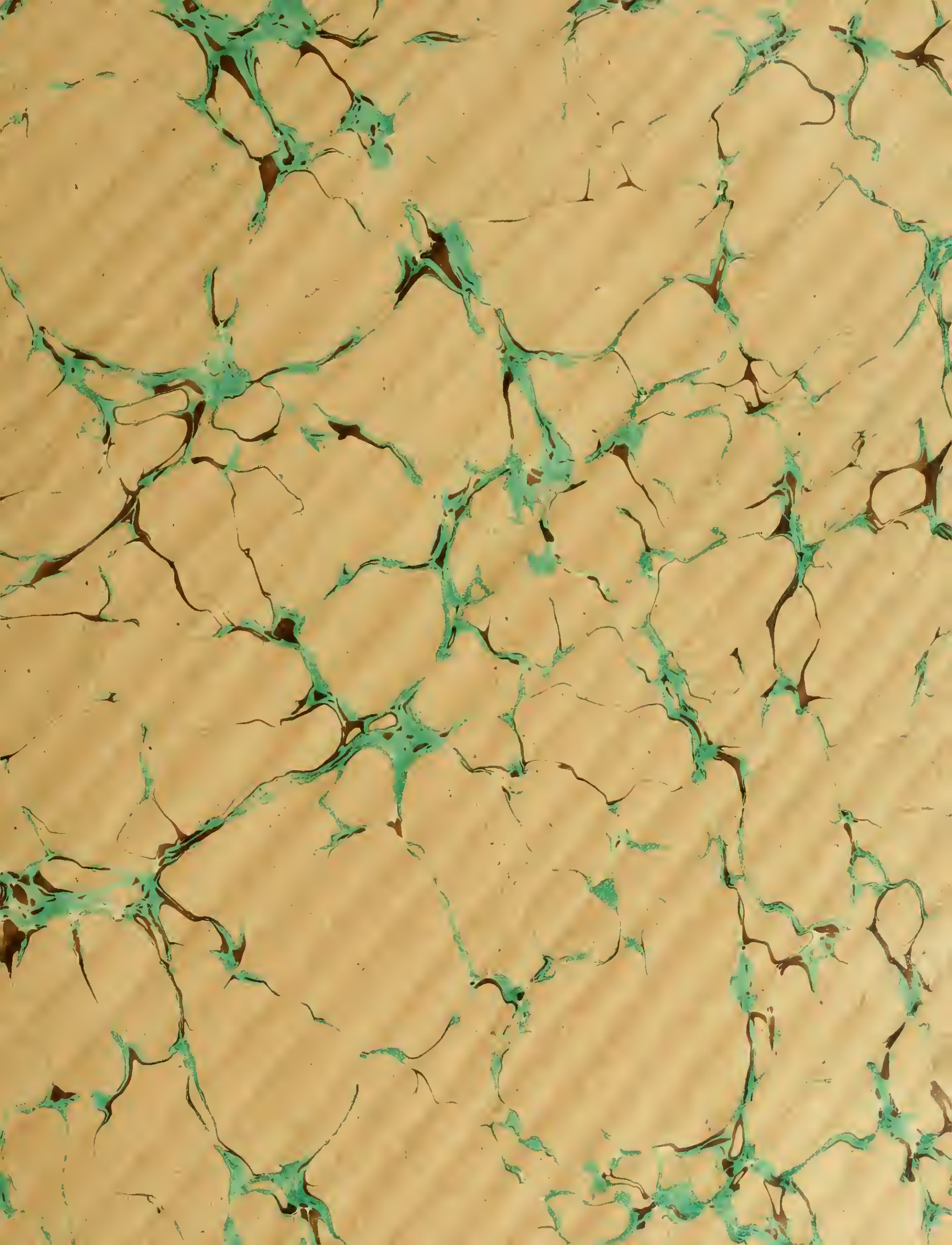






JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.


ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES ET DU BUREAU DES LONGITUDES,
PROFESSEUR AU COLLÉGE DE FRANCE.

TROISIÈME SÉRIE,

PUBLIÉE

PAR H. RESAL,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, PROFESSEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
ADJOINT AU COMITÉ D'ARTILLERIE,

AVEC LA COLLABORATION DE PLUSIEURS SAVANTS.

TOME CINQUIÈME. — ANNÉE 1879.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1879

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Étude des solutions simples des équations aux différences partielles de la Physique mathématique;

Par M. ÉMILE MATHIEU.

Dans toutes les questions de mouvements vibratoires ou de mouvements de la chaleur dans un corps de forme donnée, on commence par chercher une solution dite *simple*, qui ne dépend du temps t que par un facteur qui est le sinus d'un arc qui varie proportionnellement au temps, ou par un facteur qui renferme le temps en exposant. Cette solution simple satisfait non-seulement à une équation aux différences partielles, mais encore à certaines *conditions aux limites*. La solution la plus générale est la somme d'un nombre infini de ces solutions simples.

Mais, bien que l'on ait calculé pour différents problèmes cette solution simple, on n'en a jamais donné jusqu'ici une définition mathématique qui convienne à tous les cas. Nous nous proposons d'examiner

cette question dans ce Mémoire et nous donnerons aussi quelques propriétés de cette solution.

Sur la représentation de la solution de l'équation $\Delta v = -a^2 v$.

1. Posons

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = \Delta u;$$

l'équation qui détermine le mouvement de la température u dans un corps solide homogène renfermé sous la surface σ est

$$\frac{du}{dt} = c^2 \Delta u,$$

et, en désignant par dn l'élément de normale à la surface mené extérieurement, on aura sur cette surface

$$u = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{du}{dn} + bu = 0,$$

suivant que la surface sera entretenue à une même température que l'on prend pour zéro ou rayonnera dans l'espace où il se trouve. Pour avoir une solution simple, nous devons poser

$$u = e^{-a^2c^2t} v;$$

nous obtiendrons

$$\Delta v = -a^2 v,$$

et v devra aussi satisfaire, sur la surface σ, à l'équation

$$v = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dv}{dn} + bv = 0.$$

J'ai démontré dans ce Journal (*Mémoire sur l'intégration des équations de la Physique mathématique*, t. XVII, 1872) que toute fonction v qui satisfait, dans l'espace renfermé sous une surface σ, à l'équation

$$(1) \qquad \Delta v = -a^2 v,$$

et qui y est finie et continue ainsi que ses premières dérivées, peut toujours se mettre sous la forme

$$(2) \qquad v = \int \frac{\cos ar}{r} \rho \, d\sigma,$$

ρ étant une quantité déterminée en chaque point de σ, r la distance entre le point (x, y, z) et l'élément $d\sigma$, et l'intégrale étant étendue à tous les éléments $d\sigma$ de la surface.

Imaginons une couche infiniment mince distribuée sur σ et dont la densité soit ρ en chaque point ; concevons de plus que l'élément de cette couche exerce à la distance r une attraction proportionnelle à la fonction $\frac{\cos ar + ar \sin ar}{r^2}$. Alors v donnera, par ses dérivées par rapport à x, y, z, les composantes de l'accélération du point (x, y, z) provenant de l'attraction de la couche, et il pourra être appelé pour abréger le potentiel de cette couche.

2. Si l'on cherche la densité d'une couche distribuée sur σ et dont le potentiel est donné à l'intérieur et à l'extérieur de la surface σ, on trouve, en raisonnant comme pour le potentiel ordinaire, que cette densité ne peut avoir qu'une valeur et qu'elle est fournie par la formule

$$(3) \qquad \rho = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{dv}{dn'} + \frac{dv}{dn}\right),$$

dn' et dn étant des éléments de normale menés respectivement à l'intérieur et à l'extérieur de la surface.

Examinons le cas particulier où la fonction v est nulle sur σ. On a (Mémoire cité, n° 13)

$$0 = -\int v \frac{d\frac{\cos ar}{r}}{dn'} d\sigma + \int \frac{\cos ar}{r} \frac{dv}{dn'} d\sigma + 4\pi v,$$

et, puisque v est nul sur σ, on a

$$v = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\cos ar}{r} \frac{dv}{dn'} d\sigma.$$

Donc v est le potentiel d'une couche dont la densité a pour valeur

$$\rho = -\frac{1}{4\pi}\frac{dv}{dn'}.$$

On a donc ce théorème :

Si la fonction v est nulle sur la surface σ, elle est le potentiel d'une couche distribuée sur cette surface et dont la densité est égale à $-\frac{1}{4\pi}\frac{dv}{dn'}$.

Comme la densité de la couche est aussi donnée par la formule (3), il en résulte $\frac{dv}{dn} = 0$; v sera donc nul en tous les points d'une surface σ' infiniment voisine de σ et extérieure à σ; on peut raisonner sur σ' comme sur σ, et l'on reconnaît facilement que v est nul en tous les points extérieurs. La formule qui donnera la solution simple pourra cependant ne pas être nulle à l'extérieur de σ, car l'expression (2) ne doit servir de facteur à la solution simple que dans l'intérieur de σ.

5. Dans le mouvement vibratoire d'une membrane, le déplacement normal de chaque point est donné par la formule

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = c^2\left(\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2}\right),$$

et u est nul sur le contour s de la membrane. Pour avoir une solution simple, on pose

$$u = (\mathrm{A}\sin act + \mathrm{B}\cos act)v,$$

et l'on a

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} = -a^2 v, \tag{4}$$

v s'annulant sur le contour.

Nous avons vu (Mémoire cité, n° 14) que la solution de l'équation (4), assujettie à être finie et continue en même temps que ses dérivées du premier ordre, peut se mettre sous la forme

$$v = \int \mathrm{N}\rho\, ds \quad \text{avec} \quad \mathrm{N} = \int_0^\pi \cos(ar\cos\omega)\log(r\sin^2\omega)\, d\omega,$$

ρ étant une quantité donnée en chaque point de s, r la distance entre le point (x, y) et l'élément ds du contour, et l'intégrale étant étendue à tout ce contour.

On verrait comme ci-dessus que, si la fonction v s'annule sur le contour, ρ est donné par la formule

$$\rho = \frac{1}{2\pi}\frac{dv}{dn'}.$$

Sur la solution de l'équation $\Delta v = a^2 v$.

4. Soient u, v deux fonctions qui sont continues, ainsi que leurs premières dérivées, dans l'intérieur d'un volume ϖ limité par une surface σ. On a, d'après un théorème connu,

$$\text{(A)} \qquad \int\left(\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy}\frac{dv}{dy} + \frac{du}{dz}\frac{dv}{dz}\right)d\varpi = -\int u\,\Delta v\,d\varpi - \int u\frac{dv}{dn'}d\sigma,$$

les deux premières intégrales s'étendant à tout le volume ϖ et la troisième à toute la surface σ.

Si u est égal à v et que v satisfasse à l'équation

$$(a) \qquad \Delta v = a^2 v,$$

si de plus v ou $\frac{dv}{dn'}$ est nul à la surface, on obtient

$$\int\left[\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dz}\right)^2 + a^2 v^2\right]d\varpi = 0.$$

On en conclut que v est nul dans tous les points du volume ϖ. Donc aussi, si une fonction v, assujettie aux conditions de continuité, satisfait à l'équation (a) dans tout le volume ϖ et qu'on connaisse sa valeur ou celle de $\frac{dv}{dn'}$ sur la surface, cette fonction est complétement déterminée.

Car, si l'on suppose que deux fonctions satisfassent à ces conditions, leur différence F ou $\frac{dF}{dn'}$ sera nulle à la surface, et, d'après ce qui précède, F sera nul dans tous les points intérieurs à σ.

3. Je dis maintenant qu'on peut toujours trouver une telle fonction v, si sa valeur est connue en chaque point de la surface σ.

Posons, en général,

$$(\mathrm{D}u)^2 = \left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2,$$

et désignons par u une fonction de x, y, z qui est continue, ainsi que ses premières dérivées, dans l'intérieur de σ et dont la valeur est donnée sur σ. Il est aisé de voir que $\int[(\mathrm{D}u)^2 + a^2u^2]d\varpi$ est susceptible d'un minimum : supposons que ce minimum ait lieu pour $u = v$, et imitons une démonstration de Dirichlet. Posons

$$u = v + h\upsilon,$$

h étant une constante et υ une certaine fonction. Nous pouvons mettre $\int[(\mathrm{D}u)^2 + a^2u^2]d\varpi$ sous cette forme

$$\int[(\mathrm{D}v)^2 + a^2v^2]d\varpi - 2h\int \upsilon\frac{dv}{dn}d\sigma - 2h\int \upsilon(\Delta v - a^2v)\,d\varpi$$
$$+ h^2\int[(\mathrm{D}\upsilon)^2 + a^2\upsilon^2]\,d\varpi,$$

en nous servant de l'équation (A).

Le second terme de cette expression est nul, parce que υ est nul sur σ d'après l'hypothèse, et, pour qu'il y ait minimum pour $u = v$, il faut que le troisième terme qui change de signe avec h soit nul, quel que soit υ : il faut donc, pour le minimum cherché, que l'on ait

$$\Delta v = a^2 v$$

pour tous les points situés à l'intérieur de σ.

De ce qui précède on tire les conclusions suivantes :

1° *Toute fonction qui satisfait, dans l'intérieur d'une surface σ, à l'équation*

$$\Delta v = a^2 v,$$

et qui y est continue, ainsi que ses dérivées du premier ordre, a pour

expression

$$(B) \qquad v = \int \frac{\cos(ar\sqrt{-1})}{r} \rho \, d\sigma,$$

r étant la distance du point (x, y, z) à $d\sigma$ et ρ une fonction arbitraire des coordonnées de σ.

2° On peut toujours disposer de la fonction ρ et d'une seule manière, de telle sorte que v ait une valeur donnée en chaque point de σ.

Application de ce qui précède à la fonction $\int \frac{\cos ar}{r} \rho \, d\sigma$.

6. Si l'on change a^2 en $-a^2$ dans le raisonnement des nos 4, 5, ils cessent d'être exacts ; car on ne peut plus dire que $\int [(Du)^2 - a^2 u^2] d\varpi$ soit susceptible d'un minimum, ni que u s'annule, si cette intégrale est nulle. Toutefois, la conclusion obtenue pour la fonction (B) doit avoir lieu en général pour la fonction

$$(C) \qquad \int \frac{\cos ar}{r} \rho \, d\sigma,$$

qui s'en déduit par le changement de a^2 en $-a^2$.

En effet, la fonction ρ peut être développée en une série dont tous les coefficients constants sont arbitraires, et la formule (B) est développable aussi en une série dont les coefficients dépendront des premiers ; tous ces coefficients seront déterminés par la condition que la fonction (B) ait une valeur déterminée sur la surface σ.

Si dans le calcul précédent on change a en $a\sqrt{-1}$, les coefficients obtenus par ce changement resteront réels, et ils seront déterminés de manière que l'expression (C) ait une valeur donnée sur la surface σ.

Donc aussi on peut, en général, trouver une fonction de la forme (C) qui ait une valeur donnée en chaque point d'une surface σ. Il peut toutefois y avoir exception pour des valeurs particulières de a qui rendraient infini un des coefficients de la série qui représente la fonction (C).

Chacun des termes du développement de (C), dont les coefficients

sont d'abord arbitraires, satisfait à l'équation

$$\Delta v = -a^2 v.$$

Si l'un de ces termes s'annule sur σ, son coefficient devient infini en général. Dans ce cas, le problème est donc impossible. Mais alors on peut résoudre un autre problème qui consiste à trouver une fonction (C) qui s'annule sur σ.

Tout ce que nous venons de dire de la fonction (C) peut être étendu à la fonction de x, y,

$$\text{(D)} \qquad v = \int N\rho\, ds,$$

où

$$N = \int_0^\pi \cos(ar\cos\omega)\log(r\sin^2\omega)\, d\omega.$$

Ainsi on peut, en général, trouver une telle fonction qui ait une valeur donnée en chaque point d'une courbe s. Il y a exception pour des valeurs particulières de a; et, pour ces valeurs de a, on peut choisir ρ de manière que la fonction (D) s'annule sur le contour de la courbe s.

7. Il est bon d'élucider ce qui précède par un exemple.

Considérons la fonction (D) pour le cas où s représente le contour d'un cercle de rayon R_1, et prenons des coordonnées polaires R, α, dont l'origine est au centre du cercle. J'ai démontré (Mémoire cité, n° 21) que cette fonction peut se mettre sous la forme de la série suivante :

$$\begin{aligned} &C_0 Q_0(R, a) + (C_1\cos\alpha + D_1\sin\alpha) Q_1(R, a) + \ldots \\ &\quad + (C_n\cos n\alpha + D_n\sin n\alpha) Q_n(R, a) + \ldots, \end{aligned}$$

C_n, D_n étant des coefficients constants et $Q_n(R, a)$ la solution de l'équation

$$R^2\frac{d^2Q}{dR^2} + R\frac{dQ}{dR} + (a^2R^2 - n^2)Q = 0,$$

qui ne devient pas infinie pour $R = 0$.

On voit immédiatement qu'on pourra déterminer tous les coefficients, et d'une seule manière, de telle sorte que, sur le contour

$r = R_1$, v soit une fonction donnée arbitrairement $f(\alpha)$. Il y aura, toutefois, exception dans le cas où a est racine d'une des équations

$$\text{(E)} \quad Q_0(R_1, a) = 0, \quad Q_1(R_1, a) = 0, \quad \ldots, \quad Q_n(R_n, a) = 0, \quad \ldots.$$

Alors le problème est, en général, impossible; car, si, par exemple, l'équation $Q_n(R_1, a) = 0$ est satisfaite, les coefficients C_n, D_n deviennent infinis; ils sont cependant indéterminés si la fonction $f(\alpha)$ satisfait aux équations

$$\int_0^{2\pi} f(\alpha) \cos n\alpha \, d\alpha = 0, \quad \int_0^{2\pi} f(\alpha) \sin n\alpha \, d\alpha = 0.$$

Si l'on veut, au contraire, que v soit nul sur le contour, tous les coefficients C_0, C_1, D_1, ... sont nuls en général; il y aura, toutefois, exception si a est racine d'une des équations (E), $Q_n(R_1, a) = 0$; car alors on aura aussi la solution

$$v = (C_n \cos n\alpha + D_n \sin n\alpha) Q_n(R, a).$$

Il est facile de faire la même recherche dans le cas où le contour s se compose, ou de deux cercles concentriques, ou d'un rectangle, ou d'une ellipse, ou de deux ellipses homofocales.

8. De ce qui précède on déduit le théorème suivant :

On peut, en général, déterminer une fonction et une seule qui satisfasse à l'équation

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} = -a^2 v,$$

dans l'intérieur d'un contour s, qui y soit finie et continue, ainsi que ses dérivées du premier ordre, et qui ait en chaque point de ce contour une valeur variable et donnée arbitrairement. Il y a, toutefois, exception pour de certaines valeurs de a se suivant, les unes les autres, à des intervalles; et, pour ces valeurs de a, il existe une fonction v différente de zéro et satisfaisant à toutes les conditions précédentes, sauf qu'elle s'annule sur le contour, au lieu d'y être une fonction arbitraire. Cette fonction v, substituée dans la formule

$$\text{(F)} \qquad u = (A \sin act + B \cos act) v,$$

fournit une solution simple de l'équation

$$\frac{d^2u}{dt^2} = c^2\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2}\right),$$

qui doit être satisfaite à l'intérieur de s, et à laquelle on adjoint la condition que v soit nul sur le contour s.

[En voulant étendre à un cylindre plein les considérations que j'avais obtenues pour un corps renfermé entre deux cylindres circulaires excentriques (t. XIV de ce Journal, 1869, p. 81), j'ai obtenu un résultat inexact et en contradiction avec le théorème précédent.]

La formule (F) donne le mouvement vibratoire simple d'une membrane terminée au contour s, et le mouvement vibratoire le plus général est la somme d'une infinité de ces mouvements simples. Ces mouvements simples sont très-intéressants à étudier au point de vue de l'expérience; car, comme ils donnent des sons incommensurables entre eux, ils tendent à se produire séparément dans l'expérience, afin de donner lieu à un mouvement périodique.

9. On pourrait énoncer un théorème tout semblable au précédent et relatif à la fonction v, qui satisfait, dans l'intérieur d'une surface σ, à l'équation

$$\text{(G)} \qquad \Delta v = -a^2 v,$$

et, sur cette surface, à l'équation $v = 0$. Pour étudier le refroidissement d'un corps qui rayonne dans l'espace, il faudrait examiner les fonctions qui satisfont, dans l'intérieur de σ, à l'équation (G) et, sur cette surface, à l'équation

$$\frac{dv}{dn} + bv = 0,$$

dn étant l'élément de normale extérieure. Mais le théorème relatif à cette solution, et analogue au précédent, est encore plus difficile à démontrer rigoureusement.

Sur la solution de l'équation $\frac{d^2u}{dt^2} = c^2\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2}\right)$.

10. Considérons une fonction finie et continue, et dont les premières dérivées le sont aussi, qui satisfait dans l'intérieur d'un contour s à l'équation

$$(a) \qquad \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} = -a^2v,$$

et sur ce contour à la condition $v = 0$. Pour fixer mieux les idées, nous supposerons que cette solution donne le mouvement vibratoire simple d'une membrane fixée au contour s.

La fonction v peut se mettre sous la forme

$$v = \int N\rho\, ds \quad \text{avec} \quad N = \int_0^\pi \cos(ar\cos\omega)\log(r\sin^2\omega)\, d\omega.$$

Or je dis que, la fonction v étant nulle sur s, si la densité ρ s'annule m fois sur ce contour, v s'annule m fois dans le voisinage de ce contour.

En effet, on a la formule

$$\rho = \frac{1}{2\pi}\frac{dv}{dn'}$$

(n° 3). Donc, si ρ est nul en un point A du contour, on a aussi en ce point $\frac{dv}{dn'} = 0$. Ainsi l'accroissement de v suivant la normale est nul; donc v est nul en un point infiniment voisin du contour et situé sur la normale au point A. Il résulte aussi de là que les lignes nodales, qui forment le lieu des points où v est nul, couperont le contour normalement aux m points où la densité est nulle.

D'après cela, on peut classer les solutions simples d'après le nombre m de fois que ρ s'annule sur le contour; mais à chaque nombre m correspondront encore une infinité de valeurs de a, qui iront en croissant jusqu'à l'infini.

11. Nous supposerons que le contour soit formé d'une ou de deux courbes fermées qui ne se coupent pas elles-mêmes, ni entre elles. Aux deux coordonnées x, y on peut en substituer deux autres, α, β, telles que le contour soit représenté par une ou deux équations de la forme $\beta = \text{const.}$; α, β peuvent être supposées des coordonnées thermométriques. En effet, supposons d'abord que le contour soit composé de deux courbes; on peut imaginer entre les deux courbes un certain état d'équilibre de température, obtenu en maintenant tous les points de chaque courbe à une même température : il en résultera un système de lignes isothermes dont la température pourra être représentée par β.

Supposons ensuite que le contour ne renferme qu'un bord extérieur C; imaginons, tout le long de la courbe C, une source de chaleur qui la maintienne à une même température constante; supposons que, sous l'influence de cette source, tout le plan soit en équilibre de température : nous aurons à l'extérieur une série de lignes isothermes dont C fera partie; à l'intérieur de C, la température V sera constante. Nous pouvons former une courbe intérieure à C, et infiniment voisine, en élevant des normales intérieures dn' qui satisfassent à l'équation

$$\text{V} + \frac{d\text{V}}{dn}\,dn' = \text{const.} \quad \text{ou} \quad \frac{d\text{V}}{dn}\,dn' = \text{const.}$$

et en joignant les extrémités de ces normales. La distance normale, infiniment petite, des deux courbes sera en raison inverse du flux de chaleur qui traverse C, de l'intérieur vers l'extérieur. Cette courbe C' étant échauffée comme C, d'une manière uniforme, produirait les lignes isothermes précédentes. On peut imaginer de même des courbes intérieures infiniment voisines, C', C'', ...; et, en entretenant l'une d'elles à une même température, on obtiendra comme lignes isothermes toutes les lignes analogues à cette courbe, et qui lui sont extérieures. La limite de ces courbes sera une ligne non fermée et située à l'intérieur de C. En la maintenant à une même température, elle produirait des lignes isothermes qui couvriraient tout le plan, et dont nous désignerons encore la température par β.

Par exemple, si le contour est un cercle, la limite des courbes iso-

thermes est un point; si le contour est une ellipse, cette limite est la droite qui joint ses foyers.

Nous avons prouvé, dans les deux cas étudiés, l'existence d'un et d'un seul système de lignes isothermes, dont font partie le bord ou les deux bords, et dont l'équation est $\beta =$ const. Imaginons les trajectoires orthogonales de ces courbes; on sait qu'elles seront aussi des lignes isothermes. Soit α leur paramètre thermométrique; elles auront donc pour équation

$$\alpha = \text{const.}$$

En adoptant α, β pour coordonnées, l'équation (a) peut se mettre sous la forme

$$(b) \qquad \frac{d^2 v}{d\alpha^2} + \frac{d^2 v}{d\beta^2} = -\frac{a^2}{h^2} v,$$

en posant

$$h^2 = \left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dy}\right)^2.$$

12. Nous supposerons, ce qui n'a pas toujours lieu, que α puisse être regardé comme variant d'une manière continue dans l'intérieur du contour.

Tous les raisonnements de mon *Cours de Physique mathématique* (n°s 70, 71, 72), relatifs aux lignes nodales d'une membrane elliptique, sont applicables à la membrane terminée par le contour actuel formé d'une ou de deux courbes.

Soit $v(\alpha, \beta, a, n)$ une solution de l'équation (b) assujettie à s'annuler sur le bord intérieur $\beta = b$, s'il en existe un, et n étant le nombre de fois que u s'annule dans le voisinage du bord extérieur $\beta = B$. On déterminera a par l'équation

$$v(\alpha, B, a, n) = 0;$$

soient

$$a_1, \ a_2, \ \ldots, \ a_s, \ \ldots$$

les racines de cette équation. Ces racines ne dépendent pas de α, mais elles varient avec B, et l'on peut poser

$$(c) \qquad a_s = f(B);$$

ce qui prouve que la fonction v renferme, en facteur, une fonction de la forme $\varphi(\alpha, \beta)$. Il résulte de ce que j'ai démontré (lieu cité) que, si l'on fait croître B à partir de zéro jusqu'à l'infini, a_s ira constamment en décroissant.

L'équation (c) équivaut à

$$v(\alpha, \mathrm{B}, a_s, n) = 0.$$

Quand B croît par degrés infiniment petits, a_s décroît par degrés infiniment petits en restant indépendant de α; donc, réciproquement, quand a_s va en croissant, B décroît en restant indépendant de α. Ainsi l'équation

$$v(\alpha, \beta, a_s, n) = 0$$

aura des racines en β, indépendantes de α,

$$\beta = \mathrm{B}_1, \quad \beta = \mathrm{B}_2, \quad \beta = \mathrm{B}_3, \quad \ldots,$$

et ces solutions donneront des lignes nodales qui coïncident avec des lignes isothermes. De plus, on peut démontrer (lieu cité, n° 72) qu'il y a dans l'intérieur de ce contour $s - 1$ de ces lignes nodales.

Mais il existe un second système de lignes nodales, et je dis que ce second système est rectangulaire sur le premier.

En effet, bien que la membrane soit limitée par le contour $\beta = \mathrm{B}$, on peut la concevoir comme terminée à une ligne nodale $\beta = \mathrm{B}_i$ dont tous les points sont fixes, et la théorie qui précède reste applicable à la partie restante de la membrane. Donc la ligne $\beta = \mathrm{B}_i$ est rencontrée à angle droit par les lignes nodales de l'autre système, d'après ce que j'ai démontré ci-dessus (n° 10). Toutefois, ces lignes nodales ne se confondent pas en général avec des courbes $\alpha = \text{const}$.

On a donc le théorème suivant :

Supposons un mouvement vibratoire simple d'une membrane, donné par la formule

$$u = v(\alpha, \beta)(\mathrm{A} \sin act + \mathrm{B} \cos act),$$

où α, β sont des coordonnées thermométriques; v satisfait par consé-

quent à l'équation

$$\frac{d^2 v}{d\alpha^2} + \frac{d^2 v}{d\beta^2} = -\frac{a^2}{h^2} v;$$

supposons de plus que le bord extérieur et le bord intérieur, s'il y en a un, aient pour équation $\beta =$ const.; *enfin concevons encore que* α *varie d'une manière continue dans l'intérieur de la membrane. Alors les lignes nodales de la membrane se composeront de deux systèmes : l'un formé de lignes isothermes* β, *et l'autre de lignes rectangulaires sur les premières.*

13. Occupons-nous ensuite du mouvement vibratoire le plus général de la membrane, qui est la somme d'une infinité de mouvements vibratoires simples.

Désignons par n le nombre de fois que le bord extérieur est rencontré par les lignes nodales. Pour une valeur de n, a est susceptible d'une infinité de valeurs ; désignons-les par

$$a_{n,1}, \quad a_{n,2}, \quad \ldots, \quad a_{n,m}, \quad \ldots,$$

dans l'ordre de grandeur croissante. Ces différentes valeurs de a pourront d'ailleurs correspondre soit à une seule, soit à deux ou plusieurs formes de la fonction u.

Pour former la solution générale, nous poserons la série double

$$\begin{aligned} u = & \sum_{k=0}^{k=\infty} (\mathrm{C}_{0,k} \sin a_{0,k} ct + \mathrm{D}_{0,k} \cos a_{0,k} ct)\, v_0(\alpha, \beta, a_{0,k}) + \ldots \\ & + \sum_{k=0}^{k=\infty} (\mathrm{C}_{n,k} \sin a_{n,k} ct + \mathrm{D}_{n,k} \cos a_{n,k} ct)\, v_n(\alpha, \beta, a_{n,k}) + \ldots, \end{aligned}$$

$\mathrm{C}_{n,k}, \mathrm{D}_{n,k}$ étant des coefficients constants. Pour les déterminer, supposons que, pour $t = 0$, le déplacement et la vitesse de chaque point de la membrane aient les valeurs suivantes :

$$u = f(\alpha, \beta), \quad \frac{du}{dt} = \varphi(\alpha, \beta);$$

nous aurons

$$f(\alpha, \beta) = \Sigma D_{0,k} v_0(\alpha, \beta, a_{0,k}) + \ldots + \Sigma D_{n,k} v_n(\alpha, \beta, a_{n,k}) + \ldots,$$
$$\frac{1}{c}\varphi(\alpha, \beta) = \Sigma C_{0,k} a_{0,k} v_0(\alpha, \beta, a_{0,k}) + \ldots + \Sigma C_{n,k} a_{n,k} v_n(\alpha, \beta, a_{n,k}) + \ldots.$$

Appuyons-nous sur l'égalité

$$\int\int v(\alpha, \beta, a) v(\alpha, \beta, a') \, dx\, dy = 0,$$

a, a' étant deux quelconques des quantités a, supposées différentes entre elles et l'intégrale s'étendant à toute la surface de la membrane. Multiplions les deux équations précédentes par $v_n(\alpha, \beta, a_{n,k})\, dx\, dy$ et intégrons sur toute la surface de la membrane. Nous obtiendrons

$$D_{n,k} \int\int v_n^2(\alpha, \beta, a_{n,k})\, dx\, dy = \int\int f(\alpha, \beta) v_n(\alpha, \beta, a_{n,k})\, dx\, dy,$$
$$c a_{n,k} C_{n,k} \int\int v_n^2(\alpha, \beta, a_{n,k})\, dx\, dy = \int\int \varphi(\alpha, \beta) v_n(\alpha, \beta, a_{n,k})\, dx\, dy.$$

Si n ou k sont très-grands, $v_n(\alpha, \beta, a_{n,k})$ s'annulera et changera de signe un grand nombre de fois dans l'intérieur du contour. Il en résulte que les intégrales des seconds membres sont très-petites et que celles des premiers membres ne le sont pas ; donc $C_{n,k}$, $D_{n,k}$ sont aussi très-petits.

Sur un théorème de Legendre;

Par le P. PEPIN, s. j.

1. Je me propose de compléter la démonstration du théorème par lequel commence le § III de la troisième Partie de la *Théorie des nombres* de Legendre, et dont voici l'énoncé :

Si c est premier ou double d'un nombre premier, deux formes trinaires différentes de c ne pourront répondre à un même diviseur trinaire de la formule $t^2 + cu^2$.

Commençons par résumer rapidement la démonstration de Legendre, afin d'en remarquer le point faible. Nous supposons que les deux formes trinaires

$$c = F^2 + \theta^2(G^2 + H^2), \quad c = F'^2 + \theta'^2(G'^2 + H'^2)$$

correspondent à un même diviseur trinaire Δ et que les deux nombres G, H soient premiers entre eux, ainsi que les deux nombres G′, H′; puis, pour abréger, nous faisons

$$G^2 + H^2 = \pi, \quad G'^2 + H'^2 = \pi'.$$

Chacun des deux nombres π, π' sera représenté par le diviseur Δ, de sorte que leur produit $\pi\pi'$ sera représenté par la forme principale. On pourra donc vérifier l'équation

$$(1) \qquad \pi\pi' = y^2 + cz^2,$$

sans supposer $z = 0$, tant que l'on n'aura pas $\pi = \pi'$; car, si $\pi = \pi'$,

il peut arriver que l'équation (1) n'admette pas d'autre solution que la solution évidente $y = \pm\pi$, $z = 0$.

En multipliant l'équation (1) par $\theta^2\theta'^2$, et en remplaçant $\theta^2\pi$, $\theta'^2\pi'$ par leurs valeurs $c - F^2$, $c - F'^2$, on obtient l'équation

$$(c - F^2)(c - F'^2) = \theta^2\theta'^2 y^2 + c\theta^2\theta'^2 z^2;$$

d'où l'on déduit que la différence $F^2F'^2 - \theta^2\theta'^2 y^2$ est divisible par c.

Considérant alors que c ou $\frac{1}{2}c$ est premier, et que les deux facteurs $FF' + \theta\theta' y$, $FF' - \theta\theta' y$ sont de même parité, nous concluons que l'un de ces facteurs est divisible par c, et nous posons $FF' - \theta\theta' y = cu$. L'élimination de y entre cette équation et la précédente donne

$$(2) \qquad c - F'^2 = (F - F'u)^2 + (c - F'^2)u^2 + z^2\theta^2\theta'^2.$$

Si z est différent de zéro, cette équation est impossible, à moins que l'on ne fasse $u = 0$. Mais, si z est nécessairement nul, comme cela arrive lorsque, π et π' étant égaux, leur valeur commune est inférieure à $\frac{1}{2}c$, on peut vérifier l'équation (2) en faisant $u = 1$, pourvu que les deux carrés F^2, F'^2 soient égaux, ainsi que θ^2 et θ'^2. Ainsi il est un cas qui échappe au raisonnement de Legendre : c'est celui où les deux formes trinaires considérées sont

$$(3) \qquad c = F^2 + \theta^2(G^2 + H^2), \quad c = F^2 + \theta^2(G'^2 + H'^2),$$

$G^2 + H^2$, $G'^2 + H'^2$ étant deux décompositions d'un même nombre π en une somme de deux carrés premiers entre eux.

Supposons θ pair et F impair. Le raisonnement de Legendre exige que l'on prenne pour F^2 et F'^2 les deux carrés impairs des deux formes trinaires; ici ces deux carrés sont égaux, ainsi que les deux nombres π et π'; et, comme π est inférieur à $\frac{1}{4}c$, on ne peut vérifier l'équation (1) qu'en faisant $y = \pi$ et $z = 0$. L'équation (2) se réduit à une identité, de sorte qu'on ne peut plus en déduire la formule

$$c = F^2 + F'^2 + \theta^2\theta'^2 z^2,$$

nécessaire pour la démonstration.

2. Il reste donc à démontrer le théorème de Legendre, dans le cas où les formes trinaires de c sont données par les formules (3).

Pour faire cette démonstration, nous chercherons d'abord les conditions nécessaires pour que les deux formes trinaires

$$(4)\quad \begin{cases} \Delta = (mx + ny)^2 + (m'x + n'y)^2 + (m''x + n''y)^2, \\ \Delta = (m_1 x + n_1 y)^2 + (m'_1 x + n'_1 y)^2 + (m''_1 x + n''_1 y)^2 \end{cases}$$

d'un même diviseur quadratique

$$\Delta = px^2 + 2qxy + ry^2$$

correspondent respectivement aux deux formes trinaires (3) de

$$c = pr - q^2.$$

Les formes trinaires de c qui correspondent aux deux formes trinaires de Δ sont

$$(5)\quad \begin{cases} c = (m'n'' - m''n')^2 + (m''n - mn'')^2 + (mn' - m'n)^2, \\ c = (m'_1 n''_1 - m''_1 n'_1)^2 + (m''_1 n_1 - m_1 n''_1)^2 + (m_1 n'_1 - m'_1 n_1)^2; \end{cases}$$

et, pour qu'elles soient identiques avec les formes (3), il faut que l'on ait

$$\begin{aligned} &(m'n'' - m''n')^2 + (m'_1 n''_1 - m''_1 n'_1)^2 = \mathrm{F}^2, \\ &(m''n - mn'')^2 + (mn' - m'n)^2 = \vartheta^2(\mathrm{G}^2 + \mathrm{H}^2) = \vartheta^2\pi, \\ &(m''_1 n_1 - m_1 n''_1)^2 + (m_1 n'_1 - m'_1 n_1)^2 = \vartheta^2(\mathrm{G}'^2 + \mathrm{H}'^2) = \vartheta^2\pi. \end{aligned}$$

Or, en faisant $y = m$, $x = -n$ dans la première forme trinaire de Δ, puis $y = m_1$ et $x = -n_1$ dans la seconde, on trouve

$$(6)\quad \begin{cases} pn^2 - 2qmn + rm^2 = (m'n - n'm)^2 + (m''n - mn'')^2 = \vartheta^2\pi, \\ pn_1^2 - 2qm_1 n_1 + rm_1^2 = (m'_1 n_1 - n'_1 m_1)^2 + (m''_1 n_1 - m_1 n''_1)^2 = \vartheta^2\pi; \end{cases}$$

d'ailleurs on a, identiquement,

$$\begin{aligned} &(pn^2 - 2qmn + rm^2)(pn_1^2 - 2qm_1 n_1 + rm_1^2) \\ &\quad = [pnn_1 - q(mn_1 + m_1 n) + rmm_1]^2 + c(m_1 n - mn_1)^2; \end{aligned}$$

donc

$$(\theta^2\pi)^2 = y^2 + cz^2, \quad z = m_1 n - m n_1.$$

Si z est différent de zéro, l'équation obtenue nous montre que l'un des facteurs $\theta^2\pi + y$, ou $\theta^2\pi - y$ doit être divisible par c, puisque c est premier ou double d'un nombre premier. D'ailleurs, $\theta^2\pi$ et y étant inférieurs à c, leur somme ne peut être divisible par c sans être égale à c; on a donc

$$\theta^2\pi + y = c, \quad \theta^2\pi - y = z^2.$$

Puis, en remplaçant $\theta^2\pi$ par sa valeur $c - \mathrm{F}^2$, on déduit de ces équations

$$y = \mathrm{F}^2, \quad c = \mathrm{F}^2 + \mathrm{F}^2 + z^2.$$

Dans ce cas, le raisonnement de Legendre subsiste; car, s'il est nécessaire de prendre pour F^2 et F'^2 les deux carrés égaux des deux formes trinaires de c, l'équation $c = \mathrm{F}^2 + \mathrm{F}'^2 + \theta^2\theta'^2 z^2$, qui n'a pas lieu dans ce cas, se trouve remplacée par une équation équivalente

$$c = \mathrm{F}^2 + \mathrm{F}^2 + z^2,$$

d'où l'on déduira les mêmes conclusions. Il nous suffira donc d'établir le théorème proposé dans le cas où l'on a

$$z = m n_1 - m_1 n = 0.$$

5. Dans cette hypothèse, les deux nombres m_1, n_1 sont respectivement égaux aux deux nombres m et n. D'abord, si l'on suppose $m = 0$, comme n ne peut être nul en même temps, il faut égaler m_1 à zéro, et les formules (6) donnent $pn^2 = \theta^2\pi = pn_1^2$, d'où $n^2 = n_1^2$. Comme le signe de n_1 est arbitraire, nous prendrons $n_1 = n$; on verrait de même que, si $n = 0$, il faut faire $n_1 = 0$ et $m^2 = m_1^2$. Considérons le cas où aucun des deux nombres, m ou n, ne s'évanouit. Soit $\frac{\alpha}{\beta}$ la fraction irréductible à laquelle se réduisent les deux fractions égales $\frac{m}{n}, \frac{m_1}{n_1}$; on aura $m = \lambda\alpha$, $n = \lambda\beta$, $m_1 = \mu\alpha$, $n_1 = \mu\beta$. Les

deux représentations considérées de $\vartheta^2\pi$ par la forme Δ deviendront

$$\vartheta^2\pi = \lambda^2(p\beta^2 - 2q\alpha\beta + r\alpha^2) = \mu^2(p\beta^2 - 2q\alpha\beta + r\alpha^2),$$

et l'on en déduira $\lambda^2 = \mu^2$, puis $\lambda = \mu$, parce que l'on peut changer en même temps les signes des deux nombres m_1 et n_1. On a donc $m_1 = m$ et $n = n_1$, ainsi que nous l'avons annoncé, et les deux formes trinaires de Δ sont

$$(5)' \quad \begin{cases} \Delta = (mx + ny)^2 + (m'x + n'y)^2 + (m''x + n''y)^2, \\ \Delta = (mx + ny)^2 + (m'_1 x + n'_1 y)^2 + (m''_1 x + n''_1 y)^2. \end{cases}$$

Les équations de condition nécessaires pour l'identité des deux formules sont

$$(7) \quad \begin{cases} m'^2 + m''^2 = m'^2_1 + m''^2_1, \quad n'^2 + n''^2 = n'^2_1 + n''^2_1)^2, \\ m'n' + m''n'' = m'_1 n'_1 + m''_1 n''_1 ; \end{cases}$$

de plus, les deux formes trinaires de Δ correspondent respectivement aux deux formes suivantes de c :

$$(8) \quad \begin{cases} c = \mathrm{F}^2 + (m''n - mn'')^2 + (mn' - m'n)^2, \\ c = \mathrm{F}^2 + (m''_1 n - mn''_1)^2 + (mn'_1 - m'_1 n)^2. \end{cases}$$

4. Nous allons d'abord résoudre, d'une manière générale, les équations (7). La première, mise sous la forme

$$(m' + m'_1)(m' - m'_1) = (m''_1 + m'')(m''_1 - m''),$$

est équivalente aux formules simultanées

$$m' + m'_1 = ab, \quad m' - m'_1 = cd, \quad m''_1 + m'' = ac, \quad m''_1 - m'' = bd,$$

où a, b, c, d désignent quatre nombres entiers, assujettis à la seule condition de donner des valeurs entières aux formules

$$(\mathrm{A}) \quad m' = \frac{ab + cd}{2}, \quad m'_1 = \frac{ab - cd}{2}, \quad m'' = \frac{ac - bd}{2}, \quad m''_1 = \frac{ac + bd}{2};$$

on verrait de même que l'équation $n'^2 + n''^2 = n'^2_1 + n''^2_1$ est résolue de la manière la plus générale par les formules

$$\text{(B)} \qquad n' = \frac{\alpha\beta + \gamma\delta}{2}, \quad n'_1 = \frac{\alpha\beta - \gamma\delta}{2}, \quad n'' = \frac{\alpha\gamma - \beta\delta}{2}, \quad n''_1 = \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{2}.$$

La troisième équation de condition, transformée successivement au moyen des formules (A) et (B), prend les deux formes équivalentes

$$(9) \quad \begin{cases} (n' - n'_1)\,ab + c(n'' - n''_1)\,a - d(n'' + n''_1)\,b + cd(n' + n'_1) = 0, \\ (m' - m'_1)\,\alpha\beta + \gamma(m'' - m''_1)\,\alpha - \delta(m'' + m''_1)\,\beta + \gamma\delta(m' + m'_1) = 0. \end{cases}$$

5. Nous allons discuter cette équation, afin d'en déduire les relations qu'elle exige entre les nombres $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta$. Supposons que l'on ait en même temps $n' = n'_1$, $m' = m'_1$, les équations (7) ne peuvent être vérifiées que de l'une des deux manières suivantes :

$$m'' = m''_1 \quad \text{et} \quad n'' = n''_1,$$
$$m'' = -m''_1 \quad \text{et} \quad n'' = -n''_1.$$

Dans les deux cas, les formes trinaires (8) de c deviennent identiques, contrairement à l'hypothèse. Nous pouvons donc admettre que l'une, au moins, des deux différences $(m' - m'_1)$, $(n' - n'_1)$ ne s'évanouit pas.

1° Soit $n' - n'_1 \gtrless 0$. L'équation (9), multipliée par $(n' - n'_1)$ se met sous la forme équivalente

$$[(n' - n'_1)a - d(n'' + n''_1)]\,[(n' - n'_1)b + c(n'' - n''_1)] \\ + cd(n''^2 - n_1^2 + n'^2 - n_1^2) = 0;$$

puis, en ayant égard à l'équation $n'^2 + n''^2 = n'^2_1 + n''^2_1$, et aux formules (B), on la réduit à la suivante :

$$\gamma\delta(a\delta - d\alpha)(b\gamma - \beta c) = 0.$$

D'ailleurs, aucun des deux nombres γ, δ ne peut être nul, car alors on aurait $n' = n'_1$, contrairement à l'hypothèse; l'équation obtenue se

réduit donc à l'une des deux suivantes :

$$(10) \qquad a\delta = \alpha d, \quad b\gamma = \beta c.$$

2° Soit $n' = n'_1$ et $m' - m'_1 \gtrless 0$. L'équation (9), prise sous sa seconde forme et multipliée par $(m' - m'_1)$, se met sous la forme suivante :

$$[(m' - m'_1)\alpha - \delta(m'' + m''_1)][(m' - m'_1)\beta + \gamma(m'' - m''_1)] \\ + \gamma\delta(m''^2 - m'^2_1 + m'^2 - m''^2_1) = 0,$$

et se réduit à l'équation

$$cd(\alpha d - a\delta)(\beta c - b\gamma) = 0,$$

en vertu des formules (A) et de l'équation $m'^2 + m''^2 = m'^2_1 + m''^2_1$. Comme aucun des deux nombres c ou d n'est nul dans l'hypothèse actuelle, on conclut encore que les nombres $a, b, c, \ldots$ sont assujettis, par la troisième des conditions (7), à vérifier l'une des deux équations (10).

6. Soit d'abord $a\delta = \alpha d$. On peut vérifier cette équation en faisant évanouir les deux membres, ce qui peut s'obtenir des quatre manières suivantes :

$$a = d = 0, \quad \alpha = \delta = 0,$$
$$a = \alpha = 0, \quad d = \delta = 0.$$

Dans les deux premières hypothèses, les nombres $m'_1, m''_1, \ldots$ ou $n'_1, n''_1, \ldots$ sont nuls, et les deux formes trinaires (8) de c sont

$$c = 0 + m^2n'^2 + m^2n''^2 = 0 + m^2n'^2_1 + m^2n''^2_1,$$

ou bien

$$c = 0 + n^2(m'^2 + m''^2) = 0 + n^2(m'^2_1 + m''^2_1),$$

c'est-à-dire qu'elles se réduisent à deux sommes de deux carrés. Mais le nombre c, étant premier ou double d'un nombre premier, n'est décomposable que d'une seule manière en une somme de deux carrés ; les deux formes trinaires de c ne peuvent donc différer l'une de

l'autre que par l'ordre des deux derniers carrés, ce qui est contraire à l'hypothèse. Dans les deux derniers cas, les nombres m'_1, m''_1, n'_1, n''_1 sont respectivement égaux à m', m'', n', n'' ou à ces nombres changés de signes ; de sorte que les deux formes trinaires de c sont identiques, tandis qu'on les suppose différentes. Nous pouvons donc admettre qu'aucun des quatre nombres a, α, d, δ ne s'évanouit. Désignant alors par f_g la fraction irréductible à laquelle se réduisent les deux fractions $\frac{a}{d}, \frac{\alpha}{\delta}$, on a

$$a = \lambda f, \quad d = \lambda g, \quad \alpha = \mu, \quad \delta = \mu g,$$

λ et μ étant deux nombres entiers.

Les formules (A) et (B) deviennent alors

$$(11) \quad \begin{cases} m' = \lambda \dfrac{bf + cg}{2}, \ m'' = \lambda \dfrac{cf - bg}{2}, \ m'_1 = \lambda \dfrac{bf - cg}{2}, \ m'''_1 = \lambda \dfrac{cf + bg}{2}, \\ n' = \mu \dfrac{\beta f + \gamma g}{2}, \ n'' = \lambda \dfrac{\gamma f - \beta g}{2}, \ n''_1 = \mu \dfrac{\beta f - \gamma g}{2}, \ n''_1 = \mu \dfrac{\gamma f + \beta g}{2}. \end{cases}$$

Au moyen de ces formules, nous allons montrer que le nombre c est nécessairement composé, à moins que les deux formes trinaires (8) cessent d'être différentes. Pour cela, nous ordonnerons la première de ces formes, par rapport aux nombres arbitraires m, n, ce qui nous donnera

$$(12) \quad c = F^2 + (n'^2 + n''^2)m^2 - 2(m'n' + m''n'')mn + (m'^2 + m''^2)n^2.$$

D'ailleurs, par les formules (11), on trouve

$$F^2 = (m'n'' - m''n')^2 = \frac{\lambda^2\mu^2}{16}(f^2 + g^2)^2 (b\gamma - c\beta)^2,$$
$$n'^2 + n''^2 = \frac{\mu^2}{4}(f^2 + g^2)(\beta^2 + \gamma^2),$$
$$m'^2 + m''^2 = \frac{\lambda^2}{4}(f^2 + g^2)(b^2 + c^2),$$
$$m'n' + m''n'' = \frac{\lambda\mu}{4}(f^2 + g^2)(b\beta + c\gamma).$$

On ne peut pas supposer $F = 0$, car les deux formes ternaires (8), se

réduisant à des sommes de deux carrés, seraient nécessairement identiques, ainsi que nous l'avons déjà fait remarquer plus haut. Dès lors, les formules précédentes montrent que c est le produit de deux facteurs, dont l'un est (f^2+g^2) ou $\frac{1}{2}(f^2+g^2)$, et dont l'autre est plus grand que $\frac{f^2+g^2}{2}$. Pour que c soit premier ou double d'un nombre premier, il faut que $\frac{f^2+g^2}{2}$ soit égal à 1 ou à 2. D'ailleurs, f et g étant des nombres entiers, premiers entre eux et différents de zéro, l'équation $f^2+g^2=4$ est impossible; on doit donc prendre

$$f^2+g^2=2,\quad f=\pm g=\pm 1.$$

Si l'on a $f=g=\pm 1$, les formules (11) donnent

$$m'=m''_1,\quad m''=-m'_1,\quad n'=n''_1,\quad n''=-n'_1,$$

de sorte que l'on a

$$mn'-m'n=mn''_1-m''_1n,\quad mn''-m''n=-(mn'_1-m'_1n),$$

et les deux formes trinaires de c ne diffèrent que par l'ordre des termes. Si l'on a $f=-g=\pm 1$, les formules (11) donnent

$$m'=-m''_1,\quad m''=m_1,\quad n'=-n''_1,\quad n''=n_1,$$

ce qui donne

$$(mn'-m'n)=-(mn''_1-m''_1n),\quad (mn''-m''n)=mn'_1-m'_1n,$$

et les deux formes trinaires de c sont encore identiques, à l'ordre près des deux derniers carrés. Si donc deux formes trinaires de c, réellement différentes, correspondent à un même diviseur trinaire de la formule t^2+cu^2, le nombre c n'est ni premier ni le double d'un nombre premier.

7. On arriverait encore à la même conclusion si l'on supposait $b\gamma=\beta c$. D'abord on doit exclure les deux hypothèses

$$b=c=0,\quad \beta=\gamma=0,$$

parce qu'elles font évanouir le carré F^2. On doit aussi écarter les deux hypothèses $b=\beta=0$, $c=\gamma=0$, parce qu'elles identifient entre elles les deux formes trinaires de c. On pourra donc poser

$$\frac{b}{c}=\frac{\beta}{\gamma}=\frac{f}{g},$$

f et g désignant deux nombres premiers entre eux et différents de zéro, et l'on en déduira $b=\lambda f$, $c=\lambda g$, $\beta=\mu f$, $\gamma=\mu g$; puis, en substituant dans la formule (12) les valeurs qui en résultent pour m', m'', ..., on verrait, comme dans le cas précédent, que c est le produit de deux facteurs, dont le plus petit est $\frac{1}{2}(f^2+g^2)$, et qu'ainsi il ne peut être premier ou double d'un nombre premier, à moins que l'on n'ait

$$f^2+g^2=2 \quad \text{et} \quad f=\pm g=\pm 1.$$

Or, dans cette hypothèse, les deux formes trinaires de c ne diffèrent l'une de l'autre que par l'ordre des termes.

Ainsi, dans le cas exceptionnel où les deux formes trinaires de c seraient déterminées par les formules (3), il est impossible que ces deux formes correspondent à un même diviseur trinaire de la formule t^2+cu^2, si le nombre c est premier ou double d'un nombre premier. Le théorème proposé de Legendre est donc vrai, sans aucune exception.

Sur le développement des fonctions de M. Weierstrass suivant les puissances croissantes de la variable;

PAR M. DÉSIRÉ **ANDRE.**

INTRODUCTION.

1. Les quatre fonctions dues à M. Weierstrass, et représentées d'ordinaire par les notations $\mathrm{Al}(x)$, $\mathrm{Al}_1(x)$, $\mathrm{Al}_2(x)$, $\mathrm{Al}_3(x)$, sont, comme on le sait, développables en séries suivant les puissances croissantes de la variable x. Dans ces développements, les puissances successives de x sont multipliées respectivement par des polynômes entiers en k^2. L'étude des coefficients de ces polynômes fait l'objet du présent Mémoire.

2. Nous montrons d'abord que si, dans les polynômes en k^2 que présente un même développement, nous prenons tous les coefficients d'une même puissance de k^2, nous trouvons les termes d'une série récurrente proprement dite.

Nous donnons ensuite, pour chacune des fonctions considérées, une première équation génératrice de cette série récurrente et une première forme du terme général de cette série.

Enfin nous réduisons cette équation et cette forme à une équation et à une forme incomparablement plus simples.

3. Les résultats que nous obtenons ainsi étaient, ce nous semble, inconnus avant nous. Nous les avons donnés, pour la première fois, dans une Note que notre illustre maître, M. Hermite, a

bien voulu présenter à l'Académie des Sciences [*]. La méthode qui nous y conduit nous paraît à la fois simple et rapide : elle s'appuie sur quelques propriétés des séries récurrentes, sur les équations différentielles auxquelles satisfont les fonctions de M. Weierstrass, sur les relations qui existent entre ces fonctions et les fonctions elliptiques; enfin sur la forme des coefficients des fonctions elliptiques trouvée antérieurement par nous [**].

CHAPITRE PREMIER.

PROPRIÉTÉ FONDAMENTALE DES COEFFICIENTS.

§ I. — *Notations.*

4. Des quatre fonctions de M. Weierstrass, la seule fonction $\mathrm{Al}_1(x)$ est impaire; les trois autres sont paires [***]. Nous pouvons donc poser

$$\begin{aligned}
\mathrm{Al}\,(x) &= P_0 - P_1\frac{x^2}{2!} + P_2\frac{x^4}{4!} - P_3\frac{x^6}{6!} + \cdots,\\
\mathrm{Al}_1(x) &= Q_0\frac{x}{1} - Q_1\frac{x^3}{3!} + Q_2\frac{x^5}{5!} - Q_3\frac{x^7}{7!} + \cdots,\\
\mathrm{Al}_2(x) &= R_0 - R_1\frac{x^2}{2!} + R_2\frac{x^4}{4!} - R_3\frac{x^6}{6!} + \cdots,\\
\mathrm{Al}_3(x) &= S_0 - S_1\frac{x^2}{2!} + S_2\frac{x^4}{4!} - S_3\frac{x^6}{6!} + \cdots,
\end{aligned}$$

sachant d'ailleurs que les quatre constantes P_0, Q_0, R_0, S_0 sont égales chacune à l'unité.

5. Pour les constantes P_n, Q_n, R_n, S_n, ce sont des polynômes en-

[*] Dans la séance du 10 décembre 1877.

[**] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, séance du 10 juillet 1876. — *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, année 1877, p. 265.

[***] Briot et Bouquet, *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 466.

tiers en k^2, et nous posons

$$\begin{aligned}
P_n &= p_{n,0} + p_{n,1}k^2 + p_{n,2}k^4 + p_{n,3}k^6 + \ldots,\\
Q_n &= q_{n,0} + q_{n,1}k^2 + q_{n,2}k^4 + q_{n,3}k^6 + \ldots,\\
R_n &= r_{n,0} + r_{n,1}k^2 + r_{n,2}k^4 + r_{n,3}k^6 + \ldots,\\
S_n &= s_{n,0}k^{2n} + s_{n,1}k^{2n-2} + s_{n,2}k^{2n-4} + s_{n,3}k^{2n-6} + \ldots.
\end{aligned}$$

6. Notre objet, c'est l'étude des coefficients

$$p_{n,t},\ q_{n,t},\ r_{n,t},\ s_{n,t},$$

regardés comme des fonctions de n, l'indice t étant supposé constant.

Puisqu'on a, d'après une relation connue [*], et quel que soit t,

$$s_{n,t} = r_{n,t},$$

on voit que cette étude se réduit à celle des trois premiers, et que nous n'avons à nous occuper que des trois fonctions

$$\mathrm{Al}(x),\ \mathrm{Al}_1(x),\ \mathrm{Al}_2(x).$$

§ II. — *Formules relatives aux coefficients.*

7. Les trois fonctions considérées $\mathrm{Al}(x)$, $\mathrm{Al}_1(x)$, $\mathrm{Al}_2(x)$, regardées comme dépendant chacune de la variable x et de l'indéterminée k, satisfont respectivement, on le sait [**], aux trois équations différentielles

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2\mathrm{Al}}{dx^2} + 2k^2x\frac{d\mathrm{Al}}{dx} + 2kk'^2\frac{d\mathrm{Al}}{dk} + k^2x^2\mathrm{Al} = 0,\\
&\frac{d^2\mathrm{Al}_1}{dx^2} + 2k^2x\frac{d\mathrm{Al}_1}{dx} + 2kk'^2\frac{d\mathrm{Al}_1}{dk} + (k'^2 + k^2x^2)\mathrm{Al}_1 = 0,\\
&\frac{d^2\mathrm{Al}_2}{dx^2} + 2k^2x\frac{d\mathrm{Al}_2}{dx} + 2kk'^2\frac{d\mathrm{Al}_2}{dk} + (1 + k^2x^2)\mathrm{Al}_2 = 0,
\end{aligned}$$

dans lesquelles k'^2 n'est autre chose que la différence $1 - k^2$.

---

[*] BRIOT et BOUQUET, *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 468.

[**] *Ibid.*, p. 471. Ces équations sont dues à M. Weierstrass (*Journal de Crelle*, 1856).

Ce sont ces trois équations différentielles qui serviront de premier fondement à nos recherches.

8. Pour en tirer des formules relatives aux quantités P_n, Q_n, R_n, supposons que les fonctions $\mathrm{Al}(x)$, $\mathrm{Al}_1(x)$, $\mathrm{Al}_2(x)$ y soient respectivement remplacées par les développements que nous avons écrits en commençant (4); puis égalons à zéro le facteur qui, au résultat obtenu, multiplie $\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ dans la seconde équation, et $\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ dans les deux autres. Nous trouvons

$$P_{n+1} - 4nk^2 P_n - 2kk'^2 \frac{dP_n}{dk} + 2n(2n-1)k^2 P_{n-1} = 0,$$

$$Q_{n+1} - [1 + (4n+1)k^2]Q_n - 2kk'^2 \frac{dQ_n}{dk} + 2n(2n+1)k^2 Q_{n-1} = 0,$$

$$R_{n+1} - (1 + 4nk^2)R_n - 2kk'^2 \frac{dR_n}{dk} + 2n(2n-1)k^2 R_{n-1} = 0.$$

9. Des égalités que nous venons d'écrire (8), nous pouvons tirer maintenant des formules relatives aux coefficients $p_{n,t}$, $q_{n,t}$, $r_{n,t}$. Pour y parvenir, remplaçons d'abord, dans ces égalités, k'^2 par $1 - k^2$; ensuite les quantités P_n, Q_n, R_n par leurs expressions (5) en fonction de k; enfin égalons à zéro les coefficients respectifs de k^{2t} dans les trois résultats. Nous trouvons ainsi les trois formules

$$p_{n+1,t} - 4tp_{n,t} \qquad - 4(n - t + 1)p_{n,t-1} + 2n(2n-1)p_{n-1,t-1} = 0,$$
$$q_{n+1,t} - (4t+1)q_{n,t} - (4n - 4t + 5)q_{n,t-1} + 2n(2n+1)q_{n-1,t-1} = 0,$$
$$r_{n+1,t} - (4t+1)r_{n,t} - 4(n - t + 1)q_{n,t-1} + 2n(2n-1)r_{n-1,t-1} = 0,$$

qui sont beaucoup plus faciles à manier que les précédentes (8), puisqu'elles ne contiennent aucune dérivée.

§ III. — *Propriété fondamentale des coefficients.*

10. Considérons, d'une part, la suite formée par les coefficients

$$\ldots,\ p_{n-2,t},\ p_{n-1,t},\ p_{n,t},\ p_{n+1,t},\ p_{n+2,t},\ \ldots,$$

de l'autre celle que forment les coefficients

$$\ldots, p_{n-2,t-1}, p_{n-1,t-1}, p_{n,t-1}, p_{n+1,t-1}, p_{n+2,t-1}, \ldots.$$

Les termes de la première sont liés aux termes de la seconde par la formule

$$p_{n+1,t} - 4tp_{n,t} - 4(n-t+1)p_{n,t-1} + 2n(2n-1)p_{n-1,t-1} = 0,$$

que nous venons d'établir (9).

Cette formule nous montre nettement que, si la seconde suite est une série récurrente proprement dite, la première en est également une, c'est-à-dire que, les coefficients $p_{n,t-1}$ et $p_{n,t}$ étant regardés comme des fonctions de n seulement, si le premier est le terme général d'une série récurrente proprement dite, il en est de même du second.

Or on sait que $p_{n,0}$ est nul, quel que soit n. Donc $p_{n,1}$, d'après la formule, est le terme général d'une série récurrente proprement dite. Donc, d'après ce qu'on vient de dire, il en est encore de même pour $p_{n,t}$.

On verrait, par des considérations analogues, ou plutôt identiques, que $q_{n,t}$, $r_{n,t}$, $s_{n,t}$, regardés comme des fonctions du seul indice n, jouissent de la même propriété.

11. Ainsi les *coefficients* $p_{n,t}$, $q_{n,t}$, $r_{n,t}$, $s_{n,t}$, qui font l'objet de notre étude et que nous regardons comme des fonctions de n seulement, l'indice t étant supposé constant, *constituent chacun le terme général d'une série récurrente proprement dite*. C'est là, à nos yeux, leur *propriété fondamentale*. Cette propriété rapproche les fonctions de M. Weierstrass, non-seulement des fonctions elliptiques, mais encore des fonctions plus générales que nous avons précédemment étudiées [*].

12. Dès qu'on connait une équation génératrice d'une série récurrente, que cette équation, d'ailleurs, puisse être résolue ou soit impossible à résoudre, on sait une forme du terme général de cette série. Pour arriver aux formes des coefficients que nous étudions, il nous suffira

---

[*] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, séance du 29 octobre 1877.

donc de déterminer des équations génératrices des séries récurrentes dont ils constituent les termes généraux. La méthode que nous devons suivre nous est ainsi naturellement indiquée.

CHAPITRE II.

PREMIÈRE FORME DES COEFFICIENTS.

§ I. — *Remarque sur un problème important.*

13. Comme nous l'avons fait observer déjà (10), les formules (9) relatives aux coefficients établissent chacune une relation entre les termes, caractérisés par l'indice $t-1$, d'une première série récurrente, et les termes, caractérisés par l'indice t, d'une série récurrente nouvelle.

Si cette relation nous permettait de déduire une équation génératrice de la seconde série d'une équation génératrice de la première, elle nous fournirait le moyen d'arriver de proche en proche à des équations génératrices des séries récurrentes dont $p_{n,t}$, $q_{n,t}$, $r_{n,t}$, $s_{n,t}$ constituent respectivement les termes généraux; elle nous fournirait, par conséquent, la solution du probleme qui nous occupe.

14. Nous sommes donc conduits à nous poser ce problème général :

Étant donnée une relation, linéaire et homogène, entre certains termes

$$\ldots,\ G_{n-2},\ G_{n-1},\ G_n,\ G_{n+1},\ G_{n+2},\ \ldots,$$
$$\ldots,\ H_{n-2},\ H_{n-1},\ H_n,\ H_{n+1},\ H_{n+2},\ \ldots.$$

de deux séries récurrentes proprement dites, relation dans laquelle les termes G *ont pour coefficients des constantes et les termes* H *des polynômes entiers en n, déduire d'une équation génératrice de la série* H *une équation génératrice de la série* G.

15. Ce problème général est, on le voit, fort important. Peut-être avons-nous été le premier à le poser et à le résoudre. Quoi qu'il en soit,

il a fait de notre part l'objet d'un travail spécial [*], et voici la solution fort simple que nous en avons donnée :

Pour obtenir les racines d'une équation génératrice de la série G, *il suffit de prendre :*

1° *Les racines d'une équation génératrice de la série récurrente définie par l'égalité qui aurait pour second membre zéro et pour premier l'ensemble des termes en* G *de la relation considérée, en conservant à chacune de ces racines son degré de multiplicité ;*

2° *Les racines d'une équation génératrice de la série* H, *en augmentant le degré de multiplicité de chacune d'elles de l'exposant de la plus haute puissance de n figurant dans la relation considérée.*

16. Nous allons appliquer ce résultat aux trois formules (9) successivement, afin de déduire de la première la forme de $p_{n,t}$, de la deuxième celle de $q_{n,t}$, de la troisième celles de $r_{n,t}$ et de $s_{n,t}$.

§ II. — *Première forme du coefficient* $p_{n,t}$.

17. Reprenons la formule

$$p_{n+1,t} - 4\,t p_{n,t} - 4(n - t + 1)\,p_{n,t-1} + 2n(2n - 1)\,p_{n-1,t-1} = 0,$$

qui est la première des formules (9).

En y égalant à zéro l'ensemble des termes G, on obtient l'égalité

$$p_{n+1,t} - 4\,t p_{n,t} = 0,$$

qui définit une série récurrente admettant évidemment l'équation génératrice

$$z - 4t = 0.$$

Le plus haut exposant de n s'y trouve égal à 2.

Donc, pour passer d'une équation génératrice correspondant à $p_{n,t-1}$

[*] *Bulletin de la Société mathématique de France*, année 1878.

à une équation génératrice correspondant à $p_{n,t}$, il suffit de prendre la première de ces équations génératrices, d'y augmenter de deux unités le degré de multiplicité de chaque racine, et d'y introduire une racine nouvelle, égale à $4t$.

18. Puisque $p_{n,0}$ est nul quel que soit n, la série récurrente dont le terme général est $p_{n,1}$ admet l'équation génératrice

$$z - 4.1 = 0.$$

Il s'ensuit, si l'on tient compte du paragraphe précédent (17), que la série dont le terme général est $p_{n,2}$ admet l'équation génératrice

$$(z - 4.1)^3 (z - 4.2)^1 = 0;$$

que celle dont le terme général est $p_{n,3}$ admet l'équation génératrice

$$(z - 4.1)^5 (z - 4.2)^3 (z - 4.3)^1 = 0;$$

et ainsi de suite.

En définitive donc, la série récurrente dont le terme général est le coefficient $p_{n,t}$ admet l'équation génératrice

$$\prod_{1}^{t}{}_{\theta} (z - 4\theta)^{2t-2\theta+1} = 0.$$

19. Cette équation génératrice obtenue, la forme générale du coefficient $p_{n,t}$ s'écrit immédiatement. On a, conformément aux règles de Lagrange,

$$p_{n,t} = \sum_{1}^{t}{}_{\theta} \xi_\theta(n)(4\theta)^n,$$

l'expression $\xi_\theta(n)$ désignant un polynôme entier en n du degré $2t - 2\theta$.

§ III. — *Première forme du coefficient* $q_{n,t}$.

20. La seconde des formules (9) est celle-ci

$$q_{n+1,t} - (4t+1) q_{n,t} - (4n - 4t + 5) q_{n,t-1} + 2n(2n+1) q_{n-1,t-1} = 0.$$

Si l'on y égale à zéro l'ensemble (15) des termes en G, on obtient l'égalité

$$q_{n+1,t} - (4t+1)q_{n,t} = 0,$$

qui définit une série récurrente admettant évidemment l'équation génératrice

$$z - (4t+1) = 0.$$

Le plus haut exposant de n y est encore égal à 2.

Donc, pour passer d'une équation génératrice correspondant à $q_{n,t-1}$ à une équation génératrice correspondant à $q_{n,t}$, il suffit de prendre la première de ces équations génératrices, d'y augmenter de deux unités le degré de multiplicité de toutes les racines, et d'y introduire une racine nouvelle, égale à $4t+1$.

21. Or on sait que $q_{n,0}$ est, quel que soit n, égal à l'unité; en d'autres termes, qu'il est le terme général d'une série récurrente admettant l'équation génératrice

$$z - (4.0+1) = 0.$$

Donc les séries récurrentes dont les termes généraux sont respectivement $q_{n,1}$, $q_{n,2}$ admettent les équations génératrices respectives

$$[z-(4.0+1)]^3[z-(4.1+1)]^1 = 0,$$
$$[z-(4.0+1)]^5[z-(4.1+1)]^3[z-(4.2+1)]^1 = 0;$$

et ainsi de suite.

Donc la série récurrente dont le terme général est $q_{n,t}$ admet l'équation génératrice

$$\prod_{0}^{t}{}_{\theta}[z-(4\theta+1)]^{2t-2\theta+1} = 0.$$

22. Il s'ensuit immédiatement que la forme générale de $q_{n,t}$ est donnée par la formule

$$q_{n,t} = \sum_{0}^{t}{}_{\theta}\, \xi_{\theta}(n)\,(4\theta+1)^n,$$

dans laquelle $\xi_0(n)$ représente un polynôme entier en n, du degré $2t-2\theta$.

§ IV. — *Première forme des coefficients* $r_{n,t}$, $s_{n,t}$.

23. La troisième des formules (9) est celle-ci :

$$r_{n+1,t}-(4t+1)\,r_{n,t}-4(n-t+1)\,r_{n,t-1}+2n(2n-1)\,r_{n-1,t-1}=0.$$

Elle nous montre qu'une équation génératrice relative au coefficient $r_{n,t}$ se déduit d'une équation relative au coefficient $r_{n,t-1}$, comme une équation de $q_{n,t}$ se déduit (20) d'une équation de $q_{n,t-1}$.

On a, d'ailleurs, pour $r_{n,0}$, comme on l'avait pour $q_{n,0}$, l'équation génératrice

$$z-(4.0+1)=0.$$

Donc le coefficient $r_{n,t}$, ainsi que le coefficient $s_{n,t}$ qui lui est égal, est le terme général d'une série récurrente admettant l'équation génératrice donnée déjà (21) pour la série correspondant à $q_{n,t}$.

Donc le coefficient $r_{n,t}$, ainsi que son égal $s_{n,t}$, a la forme donnée déjà (22) pour le coefficient $q_{n,t}$.

CHAPITRE III.

FORME SIMPLIFIÉE DES COEFFICIENTS.

§ I. — *Simplification d'une équation génératrice.*

24. Soit E_n le terme général d'une série récurrente proprement dite. Soit

$$E_n+\alpha E_{n-1}+\beta E_{n-2}+\gamma E_{n-3}=0$$

la relation qui définit cette série et de laquelle on tire immédiatement l'équation génératrice

$$z^3+\alpha z^2+\beta z+\gamma=0.$$

Les termes de cette série satisfont évidemment aux deux équations

$$E_n + \alpha E_{n-1} + \beta E_{n-2} + \gamma E_{n-3} = 0,$$
$$E_{n-1} + \alpha E_{n-2} + \beta E_{n-3} + \gamma E_{n-4} = 0;$$

par suite, à une combinaison quelconque de ces deux équations, et, en particulier, à l'équation

$$E_n + (\alpha - \zeta) E_{n-1} + (\beta - \alpha\zeta) E_{n-2} + (\gamma - \beta\zeta) E_{n-3} - \gamma\zeta E_{n-4} = 0,$$

qu'on obtient en retranchant, de la première d'entre elles, la seconde multipliée par ζ.

Cette nouvelle équation pourra être regardée comme une nouvelle définition de la série, et, à cette nouvelle définition, correspondra la nouvelle équation génératrice

$$z^4 + (\alpha - \zeta) z^3 + (\beta - \alpha\zeta) z^2 + (\gamma - \beta\zeta) z - \gamma\zeta = 0,$$

qui n'est autre que la première équation génératrice multipliée par le binôme $z - \zeta$.

25. Il ressort de cet exemple qu'une série récurrente quelconque admet une infinité d'équations génératrices. On verrait d'ailleurs facilement que chacune de ces équations peut être remplacée par une équation plus compliquée, et que, une seule exceptée, chacune peut être remplacée également par une équation plus simple. Simplifier une équation génératrice, c'est la remplacer par une équation plus simple convenant à la même série.

L'unique équation génératrice qui ne peut être simplifiée jouit évidemment de cette propriété que son premier membre divise exactement les premiers membres de toutes les autres équations génératrices. Pour se rapprocher de cette équation unique, en partant d'une équation génératrice quelconque, il faudra donc, dans cette dernière, supprimer des racines : il ne faudra jamais en ajouter.

26. Cela posé, considérons une série récurrente quelconque, ayant pour terme général F_n, et supposons, d'une part, que l'équation géné-

ratrice que nous en connaissons admette la racine ω au degré i de multiplicité. Cette racine entrera, comme on sait, dans l'expression de F_n par un produit de la forme $\xi_\omega(n)\,\omega^n$, qui s'ajoutera aux produits analogues correspondant aux autres racines et dans lequel $\xi_\omega(n)$ sera un polynôme entier en n, du degré $i-1$.

Si une propriété quelconque de F_n nous montre, d'autre part, que ω^n ne figure pas dans son expression, nous serons en droit de supprimer la racine ω dans l'équation génératrice considérée, c'est-à-dire de diviser le premier membre de cette équation par le facteur $(z-\omega)^i$.

Cette manière de simplifier une équation génératrice est celle que nous allons employer.

§ II. — *Forme simplifiée du coefficient $p_{n,t}$.*

27. La fonction $\mathrm{Al}(x)$ est, comme on le sait [*], liée à la fonction elliptique $\lambda(x)$ par l'équation

$$\mathrm{D}^2 \log \mathrm{Al}(x) + k^2 \lambda^2(x) = 0;$$

d'où l'on déduit immédiatement

$$\log \mathrm{Al}(x) = \mathrm{M}x + \mathrm{N} - k^2 \int dx \int \lambda^2(x)\, dx = \psi(x),$$

et, par suite,

$$\mathrm{Al}(x) = e^{\psi(x)}.$$

Or nous avons montré [**] que, dans le développement de $\lambda^2(x)$ suivant les puissances croissantes de x, le coefficient analogue à $p_{n,t}$ ne contenait, à la puissance n, que des carrés de nombres entiers pairs. Il en est évidemment de même pour le coefficient analogue dans le développement de $\psi(x)$; et, par conséquent, pour le coefficient analogue dans le développement de $e^{\psi(x)}$, c'est-à-dire pour le coefficient $p_{n,t}$.

---

[*] Briot et Bouquet, *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 466.

[**] *Comptes rendus*, séance du 10 juillet 1876. — *Annales de l'École Normale*, année 1877, p. 265.

28. Nous avons donc le droit de supprimer, dans l'équation génératrice (18) correspondant à ce coefficient $p_{n,t}$, toute racine qui n'est pas le carré d'un nombre entier pair.

Après cette suppression, cette équation n'admettra plus que les seules racines

$$(2.1)^2,\ (2.2)^2,\ (2.3)^2,\ \ldots,\ (2.\eta)^2,$$

le nombre η n'étant autre chose que la partie entière de $\sqrt{t}$.

Quant aux degrés de multiplicité respectifs de ces racines, ils resteront ce qu'ils étaient avant la suppression. La racine $(2\tau)^2$ aura pour degré de multiplicité le nombre $2t - 2\tau^2 + 1$.

En définitive, l'équation génératrice (18) sera remplacée par l'équation

$$\prod_{1}^{\eta}{}_{\tau}\left[z - (2\tau)^2\right]^{2t-2\tau^2+1} = 0.$$

29. La forme simplifiée du coefficient $p_{n,t}$ nous sera donc donnée par l'égalité

$$p_{n,t} = \sum_{1}^{\eta}{}_{\tau}\, \xi_\tau(n)\left[(2\tau)^2\right]^{n},$$

dans laquelle nous désignons par η la partie entière de $\sqrt{t}$ et par $\xi_\tau(n)$ un polynôme entier en n, du degré $2t - 2\tau^2$.

§ III. — *Forme simplifiée du coefficient $q_{n,t}$.*

30. La fonction $\mathrm{Al}_1(x)$ est liée à la fonction elliptique $\lambda(x)$ par l'équation [*]

$$\mathrm{Al}_1(x) = \mathrm{Al}(x)\,\lambda(x).$$

Nous avons montré antérieurement [**] que, dans le développe-

[*] BRIOT et BOUQUET, *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 466.

[**] *Comptes rendus*, séance du 10 juillet 1876. — *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, année 1877, p. 265.

ment de $\lambda(x)$, suivant les puissances croissantes de x, le coefficient analogue à $q_{n,t}$ ne contient, à la puissance n, que des carrés de nombres entiers impairs. Nous venons à l'instant (27) de prouver que, dans le développement de $\mathrm{Al}(x)$, le coefficient $p_{n,t}$ ne présente à la puissance n que des carrés de nombres entiers pairs. Il suit de ces deux faits, joints à l'égalité rappelée ci-dessus, que $q_{n,t}$, coefficient du développement de $\mathrm{Al}_1(x)$, ne renferme, à la puissance n, que des carrés de nombres entiers impairs.

31. Par conséquent, nous supprimerons, dans l'équation génératrice (21), toutes les racines qui ne sont pas des carrés de nombres entiers impairs. Les seules racines restantes seront

$$(2.1+1)^2,\ (2.1+1)^2,\ (2.2+1)^2,\ \ldots,\ (2\eta+1)^2,$$

le nombre η n'étant autre chose que la partie entière de l'expression $\frac{-1+\sqrt{4t+1}}{2}$, et chacune de ces racines restantes conservera le degré de multiplicité qu'elle avait dans l'équation génératrice (21).

La nouvelle équation génératrice sera donc

$$\prod_{0}^{\eta}{}_{\tau}\left[z-(2\tau+1)^2\right]^{2t-2\tau^2-2\tau+1}=0.$$

32. Il s'ensuit que la forme simplifiée du coefficient $q_{n,t}$ sera donnée par l'égalité

$$q_{n,t}=\sum_{0}^{\eta}{}_{\tau}\,\xi_\tau(n)\left[(2\tau+1)^2\right]^n,$$

dans laquelle η a la même signification que précédemment, et où $\xi_\tau(n)$ représente un polynôme entier en n, du degré $2t-2\tau^2-2\tau$.

§ IV. — *Forme simplifiée des coefficients $r_{n,t}$, $s_{n,t}$.*

33. La fonction $\mathrm{Al}_2(x)$ est liée à la fonction elliptique $\mu(x)$ par

l'équation [*]

$$\mathrm{Al}_2(x) = \mathrm{Al}(x)\,\mu(x).$$

Nous avons montré antérieurement [**] que, dans le développement de $\mu(x)$, suivant les puissances croissantes de x, le coefficient analogue à $r_{n,t}$ ne contient, à la puissance n, que des carrés de nombres entiers impairs. Nous avons, dans le présent Mémoire (27), prouvé que, dans le développement de $\mathrm{Al}(x)$, le coefficient $p_{n,t}$ ne présente, à la puissance n, que des carrés de nombres entiers pairs. Il suit de ces deux remarques, jointes à l'équation que nous venons d'écrire, cette conséquence que $r_{n,t}$, coefficient du développement de $\mathrm{Al}_2(x)$, ne présente, à la puissance n, que des carrés de nombres entiers impairs; et il en est de même pour le coefficient $s_{n,t}$, qui est égal à $r_{n,t}$.

34. Nous pouvons donc, dans l'équation génératrice correspondant à $r_{n,t}$ et à $s_{n,t}$, supprimer toutes les racines qui ne sont pas des carrés de nombres entiers impairs. Cette suppression nous conduit, pour ces coefficients $r_{n,t}$ et $s_{n,t}$, à une nouvelle équation génératrice et à une nouvelle forme, qui ne sont autres que l'équation génératrice et que la forme correspondant au coefficient $q_{n,t}$.

§ V. — *Résumé.*

35. Comme résumé, non-seulement du Chapitre actuel, mais du présent Mémoire tout entier, nous pouvons énoncer les résultats suivants :

1° *Les coefficients* $p_{n,t}$, $q_{n,t}$, $r_{n,t}$, $s_{n,t}$, *regardés comme des fonctions de n seulement, constituent chacun le terme général d'une série récurrente proprement dite;*

---

[*] Briot et Bouquet, *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 466.

[**] *Comptes rendus*, séance du 10 juillet 1876. — *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, année 1877, p. 265.

2° *La série récurrente ayant le coefficient* $p_{n,t}$ *pour terme général admet l'équation génératrice*

$$\prod_{1}^{\eta}{}_{\tau}[z - (2\tau)^2]^{2t-2\tau^2+1} = 0,$$

les séries qui ont pour termes généraux respectifs les coefficients $q_{n,t}$, $r_{n,t}$, $s_{n,t}$ *admettent chacune l'équation génératrice*

$$\prod_{0}^{\eta}{}_{\tau}[z - (2\tau + 1)^2]^{2t-2\tau^2-2\tau+1} = 0,$$

η *représentant, dans la première de ces équations, la partie entière de* $\sqrt{t}$, *et, dans la seconde, la partie entière de* $\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{4t+1})$;

3° *Les formes générales des coefficients considérés, lesquelles se déduisent immédiatement des équations génératrices qui précèdent, sont données, pour* $p_{n,t}$, *par la formule*

$$p_{n,t} = \sum_{1}^{\eta}{}_{\tau} \xi_{\tau}(n)[(2\tau)^2]^n,$$

pour $q_{n,t}$, $r_{n,t}$, $s_{n,t}$, *par la formule*

$$q_{n,t} = \sum_{0}^{\eta}{}_{\tau} \xi_{\tau}(n)[(2\tau + 1)^2]^n,$$

η *ayant, dans ces deux formules, les mêmes significations que dans les équations génératrices correspondantes qui précèdent, et* $\xi_{\tau}(n)$ *représentant un polynôme entier en* n, *du degré* $2t - 2\tau^2$ *dans la première formule, et du degré* $2t - 2\tau^2 - 2\tau$ *dans la seconde.*

Généralisation des fonctions X_n de Legendre au cas de deux entiers, ou des fonctions qui naissent du développement des expressions

$$[1 - 2\alpha x + \alpha^2]^{\pm\frac{2l+1}{2}};$$

PAR M. ESCARY,

Professeur au Lycée de Tarbes.

§ I.

Considérons l'expression

$$(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{\frac{2l+1}{2}},$$

dans laquelle on a $\alpha < 1$ et x inférieur à l'unité en valeur absolue. Cette expression est une puissance entière, impaire et négative du potentiel. On est donc naturellement conduit à se demander, tout d'abord, si la propriété caractéristique de cette dernière fonction persiste dans la première, ou à rechercher si son paramètre différentiel du second ordre est nul.

A cet effet, si l'on revient aux coordonnées rectangles, et qu'on pose

$$P = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{\frac{2l+1}{2}},$$

on trouve sur-le-champ

$$\frac{\partial^{2l+1} P}{\partial x^{2l+1}} + \frac{\partial^{2l+1} P}{\partial y^{2l+1}} + \frac{\partial^{2l+1} P}{\partial z^{2l+1}} = 0.$$

Dans le cas de l'exposant $\frac{2l+1}{2}$ négatif, et en posant

$$\frac{1}{P} = Q,$$

on voit qu'on obtiendra la même équation aux dérivées partielles, de l'ordre $2l+4$, en Q.

Dans le calcul de ces deux équations aux dérivées partielles, on observe que leur existence tient précisément à ce que P est une puissance, *entière, impaire et négative du potentiel.* Cette circonstance nous conduit donc, lors de l'exposant $\frac{2l+1}{2}$ négatif, et en désignant par V l'inverse de la distance de deux points, à poser

$$P = V^{-(2l+1)}.$$

On en conclut

$$\Delta_2 P = V^{2l} \Delta_2 V = 0,$$

en posant, pour abréger,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \Delta_2 F.$$

En posant $U = \frac{1}{V}$, et faisant

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 F}{\partial z^4} = \Delta_4 F,$$

on conclut de même immédiatement

$$\Delta_4 Q = U^{2l} \Delta_4 U = 0.$$

Nous voyons donc ainsi que les diverses puissances impaires de la distance de deux points peuvent se classer en deux catégories. La première catégorie, dont la forme générale est $P = V^{-(2l+1)}$, et dont le paramètre différentiel du second ordre est nul, comprend les puissances impaires et positives du potentiel. La seconde catégorie, dont la forme générale est $Q = U^{2l+1}$, et dont le paramètre différentiel du

quatrième ordre est nul, comprend les puissances impaires et négatives de la même fonction.

Sous ce premier point de vue, V et U sont donc les éléments simples auxquels il convient de rattacher toutes les puissances impaires successives de la distance de deux points. Maintenant, il paraît intéressant de rechercher si, dans la généralisation des X_n de Legendre, *au cas de deux entiers*, et qui résulte du développement des expressions

$$(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{\pm\frac{2l+1}{2}},$$

ordonné suivant les puissances ascendantes de α, les analogies de propriétés analytiques avec ces polynômes célèbres se conservent complétement, et, dans le cas contraire, de trouver les inégalités auxquelles l'exposant $\frac{2l+1}{2}$ doit satisfaire pour qu'il en soit ainsi.

§ II.

Nous allons d'abord considérer le développement

$$(a)\quad (1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{\mu} = X_{\mu}^{(0)} + X_{\mu}^{(1)}\alpha + X_{\mu}^{(2)}\alpha^2 + \ldots + X_{\mu}^{(n)}\alpha^n + \ldots,$$

qui nous sera utile dans la suite, et dans lequel μ est un nombre quelconque positif ou négatif. Le polynôme général $X_{\mu}^{(n)}$ a pour valeur

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} X_{\mu}^{(n)} = (-1)^n 2^n \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+1)}{1.2.3.4\ldots n} \\ \times\Big[x^n + \frac{n(n-2)}{2.2(\mu-n+1)}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2^2.2.4(\mu-n-1)(\mu-n+2)}x^{n-4} \\ + \frac{n(n-1)\ldots(n-5)}{2^3.2.4.6(\mu-n+1)\ldots(\mu-n+3)}x^{n-6} + \ldots\Big]. \end{aligned}\right.$$

Si l'on désigne par γ un angle réel compris entre zéro et π, que l'on pose $x = \cos\gamma$, et qu'on remplace $X_{\mu}^{(n)}$ par $P_{\mu}^{(n)}$, la formule (1) prend l'une des quatre formes suivantes, selon la manière dont on dirige le

développement :

$$P_\mu^{(n)} = (-1)^n 2^n \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+1)}{1.2.3.4\ldots n}\Big[\cos^n\gamma + \frac{n(n-1)}{2.2(\mu-n+1)}\cos^{n-2}\gamma + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2^2\, 2.4(\mu-n+1)(\mu-n+2)}\cos^{n-4}\gamma + \ldots\Big],$$

$$P_\mu^{(n)} = (-1)^n\Big[\frac{2\mu(2\mu-1)(2\mu-2)\ldots(2\mu-n+1)}{1.2.3.4\ldots n} - \frac{\mu}{1}\frac{(2\mu-2)(2\mu-3)\ldots(2\mu-n)}{1.2.3\ldots n-1}4\sin^2\frac{\gamma}{2} + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}\cdot\frac{(2\mu-4)(2\mu-5)\ldots(2\mu-n-1)}{1.2.3\ldots n-2}4^2\sin^4\frac{\gamma}{2} - \ldots\Big],$$

$$P_\mu^{(n)} = \frac{2\mu(2\mu-1)(2\mu-1)\ldots(2\mu-n+1)}{1.2.3.4\ldots n} - \frac{\mu}{1}\frac{(2\mu-2)(2\mu-3)\ldots(2\mu-n)}{1.2.3\ldots n-1}4\cos^2\frac{\gamma}{2} + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}\frac{(2\mu-4)(2\mu-5)\ldots(2\mu-n-1)}{1.2.3\ldots n-2}4^2\cos^4\frac{\gamma}{2} - \ldots,$$

$$\frac{1}{2}P_\mu^{(n)} = (-1)^n\Big[\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+1)}{1.2.3.4\ldots n}\cos n\gamma + \frac{\mu}{1}\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+2)}{1.2.3\ldots n-1}\cos(n-2)\gamma + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+3)}{1.2.3\ldots n-2}\cos(n-4)\gamma + \ldots\Big].$$

Enfin, trois fonctions consécutives du développement (a) vérifient la relation linéaire

$$(2)\qquad nX_\mu^{(n)} - (2n-2\mu-2)X_\mu^{(n-1)} + (n-2\mu-2)X_\mu^{(n-2)} = 0.$$

Cette équation s'obtient aisément, et montre que les polynômes (1) remplissent l'office des fonctions de Sturm quand le nombre μ satisfait à l'inégalité

$$(b)\qquad \mu < \frac{n-2}{2}.$$

§ III.

La différentiation *par rapport à x, l fois répétée,* des deux membres de l'égalité

$$(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{2^n\Gamma(n+1)}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}\alpha^n,$$

donne sur-le-champ

$$(3) \qquad (1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{2l+1}{2}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} X^{(n)}_{-\frac{2l+1}{2}} \alpha^n,$$

en posant, pour abréger,

$$(4) \qquad \frac{\Gamma(l+1)}{2^n \Gamma(2l+1) \Gamma(n+l+1)} \frac{d^{n+2l}(x^2-1)^{n+l}}{dx^{n+2l}} = X^{(n)}_{-\frac{2l+1}{2}},$$

et divisant, après chaque différentiation, les deux membres de l'égalité précédente par $(2m-1)\alpha$, m indiquant l'ordre de la dérivation effectuée. Le développement (3) est d'ailleurs évidemment convergent dans la même étendue que celui dont il est déduit par voie de différentiation. Sous cette forme (4), on voit immédiatement, par le théorème de Rolle, que l'équation

$$X^{(n)}_{-\frac{2l+1}{2}} = 0$$

a toutes ses racines réelles, inégales et comprises entre deux nombres moindres que l'unité.

La relation (2) entre trois fonctions consécutives devient, dans le cas actuel,

$$(2\ bis) \qquad nX^{(n)}_{-\frac{1}{2}} - (2n+2l-1)xX^{(n-1)}_{-\frac{2l+1}{2}} + (n+2l-1)X^{(n-2)}_{-\frac{2l+1}{2}} = 0.$$

On trouve encore, sans difficulté, qu'une même fonction et ses deux premières dérivées du développement (3) vérifient l'équation linéaire

$$(5) \qquad (1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2(l+1)x\frac{dy}{dx} + n(n+2l+1)y = 0,$$

dont l'intégrale générale est

$$(6) \qquad y = AX^{(n)}_{-\frac{2l+1}{2}} + BX^{(n)}_{-\frac{2l+1}{2}} \int \frac{dx}{\left(X^{(n)}_{-\frac{2l+1}{2}}\right)^2 (1-x^2)^{l+1}},$$

A et B étant deux constantes arbitraires.

Au moyen de l'intégration par parties, on conclut aisément

$$(7)\qquad \int_{-1}^{+1} X^{(\nu)}_{-\frac{2l+1}{2}}\, X^{(n)}_{-\frac{2l+1}{2}}\, dx = 0,$$

quand ν est différent de n; et, en se servant de la relation (2 *bis*) entre trois fonctions consécutives, et en ayant égard au théorème précédent (7), on a, dans le cas de $\nu = n$,

$$(8)\qquad \int_{-1}^{+1} \left(X^{(n)}_{-\frac{2l+1}{2}}\right)^2 dx = 2\,\frac{2l+1}{2n+2l+1}\,\frac{(n+2l)(n+2l-1)\ldots(2l+1)}{1.2.3.4\ldots n}.$$

Le développement (3) a été donné, pour la première fois, sous une forme équivalente, par M. Heine (*Journal de Crelle*, t. LXII, p. 110). Ce géomètre a encore considéré plusieurs autres cas où l'exposant μ, entier ou fractionnaire, est *toujours négatif*. Nous nous attacherons plus particulièrement aux deux catégories d'expressions que nous avons tout d'abord indiquées, en nous bornant, pour les autres cas, à ce qui nous sera directement nécessaire. L'équation différentielle (5) a été obtenue par Lamé dans le cas où l'on a $y = X^{(n-l)}_{-\frac{2l+1}{2}}$ (*Leçons sur les fonctions inverses des transcendantes et les surfaces isothermes*, p. 233), et l'éminent géomètre en a trouvé l'intégrale particulière entière, laquelle était seule utile pour le but qu'il poursuivait. Il l'a exprimée au moyen d'un polynôme entier. Les autres résultats que nous venons d'obtenir ne paraissent pas avoir été remarqués jusqu'ici, du moins que nous sachions.

§ IV.

L'intégration *entre les limites x et -1, $l+1$ fois répétée*, des deux membres de l'égalité

$$(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{2^n\,\Gamma(\mu+1)}\cdot\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n},$$

multipliée préalablement par $(2m-1)\alpha dx$, m indiquant l'ordre de

l'intégration à effectuer, donne immédiatement

$$(9) \qquad (1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{\frac{2l+1}{2}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} X^{(n)}_{\frac{2l+1}{2}} \alpha^n,$$

en posant, pour abréger et à partir du terme de rang $2l+3$,

$$(10) \qquad (-1)^{l+1} \frac{\Gamma(2l+3)}{2^n \Gamma(l+2)\Gamma(n-l)} \frac{d^{n-2l-2}(x^2-1)^{n-l-1}}{dx^{n-2l-2}} = X^{(n)}_{\frac{2l+1}{2}}.$$

En particulier, le coefficient de α^{2l+2} est

$$(11) \qquad (-1)^{l+1} \frac{\Gamma(2l+3)}{2^{2l+2}\Gamma(l+2)\Gamma(l+2)} (x^2-1)^{l+1} = X^{(2l+2)}_{\frac{2l+1}{2}}.$$

On voit donc ainsi que les coefficients des diverses puissances de α, qui précèdent le terme de rang $2l+3$, ne se trouvent plus représentés par des expressions différentielles. L'inégalité (b) devient, dans le cas actuel,

$$n > 2l+3,$$

et l'on observe encore que la propriété curieuse de ces polynômes de remplir l'office des fonctions de Sturm se perd en même temps que celle d'être représentés par des expressions différentielles.

Sous les formes (10) et (11), on voit que l'équation

$$X^{(2l+2)}_{\frac{2l+1}{2}} = 0$$

a toutes ses racines réelles et égales à l'unité en valeur absolue, et que généralement l'équation

$$X^{(n)}_{\frac{2l+1}{2}} = 0$$

$l+1$ racines égales à $+1$, $l+1$ égales à -1, et $n-2l-2$ réelles, inégales et comprises entre -1 et $+1$.

§ V.

Dans cette hypothèse de $n > 2l + 3$, la relation (2) entre trois fonctions consécutives s'écrit

$$(2\ ter)\quad nX^{(n)}_{\frac{2l+1}{2}} - (2n-2l-3)xX^{(n-1)}_{\frac{2l+1}{2}} + (n-2l-3)X^{(n-2)}_{\frac{2l+1}{2}} = 0.$$

Une même fonction $X^{n}_{\frac{2l+1}{2}}$ et ses deux premières dérivées vérifient l'équation différentielle linéaire

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + 2lx\frac{dy}{dx} + n(n-2l-1)y = 0,$$

dont l'intégrale générale est

$$y = MX^{(n)}_{\frac{2l+1}{2}} + NX^{n}_{\frac{2l+1}{2}}\int\frac{(1-x^2)^l dx}{\left(X^{n}_{\frac{2l+1}{2}}\right)^2},$$

M et N étant deux constantes arbitraires.

L'intégration par parties conduit sur-le-champ au théorème

$$(12)\qquad \int_{-1}^{+1} X^{(\nu)}_{\frac{2l+n}{2}} X^{(n)}_{\frac{2l+1}{2}} d_1 x = 0,$$

pour ν différent de n. En se servant de la relation ($2\ ter$) entre trois fonctions consécutives, et en ayant égard au théorème précédent (12), on a, dans le cas de $\nu = n$,

$$(13)\quad \int_{-1}^{+1}\left(X^{n}_{\frac{2l+1}{2}}\right)^2 dx = -2\frac{2l+1}{2n-2l-1}\,\frac{(n-2l-2)(n-2l-3)\ldots(-2l-1)}{1.2.3.4\ldots n}.$$

§ VI.

Si nous revenons à la valeur générale (1) du polynôme $X^{(n)}_{\mu}$ et que nous y fassions $n = \mu$, nous obtenons

$$(14)\quad X^{(\mu)}_{\mu} = (-1)^{\mu}2^{\mu}\left[x^{\mu} + \frac{\mu(\mu-1)}{2.2}x^{\mu-2} + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)}{2^2.2.4.1.2}x^{\mu-4} + \ldots\right].$$

Or ce polynôme, ayant tous ses termes de même signe et de même parité, ne peut s'annuler pour aucune valeur réelle de x, sauf pour la valeur zéro quand il est de degré impair. La même conclusion subsiste *a fortiori* lorsque μ, étant supposé entier, est supérieur à n. Nous pouvons donc énoncer ce théorème :

Théorème I. — *Dans le cas de l'exposant μ entier et positif, l'équation*

$$X_\mu^{(\nu)} = 0,$$

dans laquelle on a $\nu \leqq \mu$, a toutes ses racines imaginaires conjuguées, sauf une racine nulle, quand elle est de degré impair.

A l'inspection de la valeur (14) du polynôme $X_\mu^{(\mu)}$, on voit que ce théorème subsiste dans le cas de μ positif et fractionnaire, pourvu que l'entier n soit inférieur ou égal au plus grand entier contenu dans μ.

Dans le cas de l'exposant μ entier et positif, le développement (a) a un nombre limité de termes ; de plus, le premier et le dernier de ces termes sont du degré zéro en x. Cette dernière remarque conduit à soupçonner l'existence du théorème suivant, qui d'ailleurs est presque évident :

Théorème II. — *Dans le développement de l'expression*

$$(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^\mu,$$

ordonné suivant les puissances ascendantes de α, lors de l'exposant μ entier et positif, les polynômes $X_\mu^{(n)}$ équidistants des extrêmes sont identiquement égaux.

En effet, cela résulte de ce que l'on a identiquement

$$(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^\mu = (\alpha^2 - 2\alpha x + 1)^\mu$$

dans l'hypothèse de μ entier et positif. On en conclut l'identité

$$X_\mu^{(\mu-p)} = X_\mu^{(\mu+p)}.$$

Par conséquent, le développement précédent a toujours un nombre

impair de termes et renferme, par suite, un polynôme $X_\mu^{(\mu)}$ de degré plus élevé que tous les autres.

§ VII.

Si maintenant on traite l'exposant μ comme un paramètre arbitraire et qu'on le fasse passer d'une manière continue par toutes les valeurs positives, il résulte du théorème précédent, rapproché de la valeur générale (1) (§ II) du polynôme $X_\mu^{(n)}$, que les polynômes $X_\mu^{(2l)}$ et $X_\mu^{(2l-1)}$, dans lesquels on fait tendre μ, supposé fractionnaire et inférieur à l, vers cet entier, ont chacun à la limite, lorsqu'on les égale à zéro, $2l$ et $2l-2$ racines infinies respectivement, le dernier ayant en outre une racine nulle. Car on sait que, quand une équation algébrique de degré $2l$ s'abaisse au degré zéro, par suite de la variation continue de ses coefficients, toutes ses racines deviennent infinies. Les polynômes $X_\mu^{(2l-2)}$ et $X_\mu^{(2l-3)}$, égalés à zéro, dans la même hypothèse, ont chacun un couple de racines imaginaires conjuguées, avec $2l-4$ et $2l-6$ racines réelles infinies respectivement, le dernier ayant en outre une racine nulle, et ainsi de suite.

Le paramètre μ croissant encore d'une unité, les polynômes $X_\mu^{(n)}$ de degré impair, dont il a été question dans le théorème précédent, deviennent de degré pair ; et ceux dont le degré n est compris entre μ et 2μ se trouvent avoir échangé par cet accroissement, lorsqu'on les égale à zéro, et d'après le théorème II, deux de leurs racines réelles en un couple de racines imaginaires conjuguées. Ils ont acquis en même temps une nouvelle racine réelle. En résumé, par l'accroissement d'une unité de l'entier positif μ, les polynômes $X_\mu^{(n)}$ égalés à zéro, et dont le degré est impair et compris entre μ et 2μ, ont gagné deux racines imaginaires conjuguées et en ont perdu une réelle qui était nulle. Les polynômes dont le degré est pair et compris entre μ et 2μ acquièrent une racine réelle nulle et éprouvent d'ailleurs absolument la même modification que ceux de degré impair.

Il est facile de constater qu'en passant du réel à l'imaginaire par l'infini les racines de ces polynômes égalés à zéro passent par l'éga-

lité. En effet, considérons l'équation du second degré

$$X_\mu^{(2)} = 0,$$

et le cas où μ converge vers l'unité par des valeurs croissantes. En supprimant les facteurs indépendants de x et posant

$$x = \frac{1}{y},$$

on a

$$y^2 - 2(1-\mu) = 0,$$

équation qui a deux racines égales pour $\mu = 1$. Donc les racines de l'équation $X_\mu^{(2)} = 0$ deviennent égales au moment où elles deviennent infinies.

§ VIII.

Nous avons vu que l'équation

$$X_{\frac{2l+1}{2}}^{(2l+2)} = 0$$

a ses racines égales à l'unité en valeur absolue, et que celles de l'équation

$$X_l^{(2l)} = 0$$

sont infinies. Il en résulte que les racines de l'équation

$$X_\mu^{(2l+1)} = 0,$$

dans le cas où μ est compris entre l et $l+\frac{1}{2}$, sont toutes réelles et supérieures à l'unité en valeur absolue.

Enfin il suit encore de cette discussion que, lorsque μ, supposé fractionnaire, est compris entre l et $l+1$, les polynômes $X_\mu^{(2l)}$ et $X_\mu^{(2l-1)}$, égalés à zéro, ont chacun un couple de racines imaginaires conjuguées avec $2l-2$ et $2l-4$ racines réelles et supérieures à l'unité; que les polynômes $X_\mu^{(2l-2)}$, $X_\mu^{(2l-3)}$, ..., égalés à zéro, ont chacun, dans cette même hypothèse, $2l-6$, $2l-8$, ... racines réelles et supérieures à

l'unité. Les polynômes de degré impair renferment, en outre, une racine nulle.

Remarque. — Le théorème de Sturm est propre à séparer les racines de l'équation

$$X_\mu^{(n)} = 0,$$

pourvu que l'inégalité (b) soit satisfaite; par conséquent, pour μ entier ou fractionnaire, mais inférieur à $+1$, l'équation précédente a toutes ses racines réelles et inégales.

§ IX.

Il existe encore quelques relations entre deux ou entre trois polynômes consécutifs $X_\mu^{(n)}$, qui ont lieu pour toutes les valeurs de μ, et, par conséquent, quelle que soit la nature des racines de ces polynômes. Voici d'abord une équation entre deux fonctions consécutives:

$$x\frac{dX_\mu^{(n)}}{dx} - \frac{dX_\mu^{(n-1)}}{dx} = nX_\mu^{(n)},$$

qu'on trouve aisément, et qui est indépendante de μ explicitement.

On trouve encore immédiatement

$$\frac{dX_\mu^{(n+1)}}{dx} - 2x\frac{dX_\mu^{(n)}}{dx} + \frac{dX_\mu^{(n-1)}}{dx} + 2\mu X_\mu^{(n)} = 0.$$

Cette équation, combinée avec la précédente, donne

$$\frac{dX_\mu^{(n+1)}}{dx} - \frac{dX_\mu^{(n-1)}}{dx} - 2(n-\mu)X_\mu^{(n)} = 0,$$

relation qui fournit, pour $\mu = n$, une seconde démonstration du théorème II.

Si, dans cette équation, on change successivement n en $n-2, n-4, n-6, \ldots$, et qu'on ajoute les équations ainsi obtenues, on trouve

$$\frac{dX_\mu^{(n+1)}}{dx} = 2(n-\mu)X_\mu^{(n)} + 2(n-\mu-2)X_\mu^{(n-2)} + 2(n-\mu-4)X_\mu^{(n-4)} + \ldots.$$

§ X.

Résumons. Le développement de la fonction $(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^\mu$, ordonné suivant les puissances ascendantes de α, et dans lequel μ peut passer par toutes les valeurs depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, donne naissance, au point de vue de l'espèce des racines, à cinq catégories de polynômes :

La première catégorie, obtenue en attribuant à μ toutes les valeurs inférieures à l'unité, se compose de polynômes dont toutes les racines sont réelles et inégales.

La deuxième catégorie se compose de polynômes dont le degré est inférieur ou égal à μ, supposé positif. Toutes leurs racines sont imaginaires.

La troisième catégorie se compose de polynômes dont le degré est compris entre μ et 2μ, μ étant supposé positif. Leurs racines sont en partie réelles et supérieures à l'unité, et en partie imaginaires.

La quatrième catégorie se compose de polynômes dont le degré est $2l + 1$, tandis que μ est compris entre l et $l + \frac{1}{2}$. Leurs racines sont réelles et supérieures à l'unité.

La cinquième catégorie se compose des polynômes dont le degré n'est pas inférieur à $2l + 2$, tandis que μ n'est pas supérieur à $\frac{2l+1}{2}$. Leurs racines sont en partie réelles et égales à l'unité en valeur absolue, et en partie réelles, inégales et comprises entre -1 et $+1$.

§ XI.

On aperçoit immédiatement une application intéressante de l'analyse précédente, dans l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre de la théorie analytique de la chaleur, lors de l'état stationnaire. Cette application concerne les problèmes de la sphère et des deux ellipsoïdes de révolution. Le facteur $P_l^{(n)}$ de Lamé relatif à la latitude, dans le probleme de la sphère (*Leçons sur les fonctions inverses*, etc., p. 229), ainsi que ses analogues dans les deux ellipsoïdes

de révolution, se met sous la forme d'une expression différentielle. La forme de ce résultat avait été indiquée par M. Liouville en 1846; mais nous donnons ici une génération uniforme de ces expressions, et nous indiquons d'une manière précise la nature des fonctions simples qui les composent.

D'abord, pour la sphère, on a

$$P_l^{(n)} = (1-\mu^2)^{\frac{l}{2}} M^{(n-l)}_{-\frac{2l+1}{2}},$$

en posant, pour abréger,

$$M^{(n-l)}_{-\frac{2l+1}{2}} = \frac{\Gamma(l+1)}{2^{n-l}\Gamma(2l+1)\Gamma(n+1)}\frac{d^{n+l}(\mu^2-1)^n}{d\mu^{n+l}}.$$

On voit, par cette forme du facteur $M^{(n-l)}_{-\frac{2l+1}{2}}$, que l'entier l est essentiellement positif, et toujours inférieur ou égal à n. Trois fonctions consécutives $P_l^{(n)}$, $P_l^{(n-1)}$, $P_l^{(n-2)}$, dans lesquelles l reste constant, satisfont à la relation

$$(1)\quad (1-\mu^2)^{\frac{l}{2}}\left[(n-l)M^{(n-l)}_{-\frac{2l+1}{2}} - (2n-1)\mu M^{(n-l-1)}_{-\frac{2l+1}{2}} + (n+l-1)M^{(n-l-2)}_{-\frac{2l+1}{2}}\right] = 0.$$

L'intégration par parties donne le théorème

$$(2)\qquad \int_{-1}^{+1} P_l^{(n)} P_l^{(\nu)} d\mu = 0,$$

quand ν est différent de n. En se servant de ce théorème (2) et de la relation (1), entre trois fonctions consécutives, on trouve, dans le cas de $\nu = n$, d'abord

$$\int_{-1}^{+1} [P_l^{(n)}]^2 d\mu = \int_{-1}^{+1} (1-\mu^2)^l \left[M^{(n-l)}_{-\frac{2l+1}{2}}\right]^2 d\mu$$
$$= \frac{2l+1}{2n+1}\,\frac{(n+l)(n+l-1)\ldots 2l+1}{1.2.3.4\ldots n-l}\int_{-1}^{+1}(1-\mu^2)^l d\mu;$$

ensuite, en achevant l'intégration,

$$(3)\quad \int_{-1}^{+1} [P_l^{(n)}]^2 d\mu = 2\,\frac{2l+1}{2n+1}\,\frac{n+l.n+l-1\ldots 2l+1}{1.2.3.4\ldots n-l}\,\frac{2.4.6\ldots 2l}{3.5.7\ldots 2l+1}.$$

Cette valeur (3), que Lamé désigne par la notation $p_l^{(n)}$, est celle qui convient aux expressions des constantes arbitraires $G_l^{(n)}$ et $H_l^{(n)}$, et, par suite, à l'expression V de la température. C'est encore cette valeur de $p_l^{(n)}$ qui entre dans l'expression du développement en série d'une fonction arbitraire $F(\psi, \mu)$ des coordonnées sphériques ψ et μ. On voit, par les considérations précédentes, que les termes de la série capable de représenter cette fonction acquièrent une signification analytique précise et appropriée à l'étude ultérieure des particularités qu'elle peut offrir.

§ XII.

Dans les ellipsoïdes de révolution, Lamé a ramené l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre, exprimant l'équilibre de température, à l'intégration d'équations aux différentielles ordinaires. Il a atteint ce résultat au moyen d'un heureux choix de variables ou de coordonnées. Dans l'ellipsoïde de révolution planétaire, il ramène l'intégration à celle des deux équations différentielles

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{d\left[(1-x^2)\dfrac{dP}{dx}\right]}{dx} = \left[\dfrac{l^2}{1-x^2} - n(n+1)\right]P, \\[2ex] \dfrac{d\left[(1+x^2)\dfrac{dR}{dx}\right]}{dx} = \left[n(n+1) - \dfrac{l^2}{1+x^2}\right]R, \end{cases}$$

dans lesquelles on a posé

$$\frac{\lambda'}{c} = x = \frac{\mathcal{E}(\beta)}{E(\beta)}$$

pour la première, et

$$\frac{\rho'}{c} = x = \operatorname{tang}\gamma$$

pour la seconde; β et γ sont les paramètres thermométriques, à savoir:

$$\beta = c\int_0^{\lambda'} \frac{d\lambda'}{c^2 - \lambda'^2},$$

$$\gamma = c\int_0^{\rho'} \frac{d\rho'}{\rho'^2 + c^2}.$$

Les intégrales générales des équations (4), lorsqu'on y remplace P par $(1-x^2)^{\frac{l}{2}}X$ et R par $(1+x^2)^{\frac{l}{2}}U$, sont

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} y &= A X^{(n-l)}_{-\frac{2l+1}{2}} + B X^{(n-l)}_{-\frac{2l+1}{2}} \int \frac{dx}{\left[X^{(n-l)}_{-\frac{2l+1}{2}}\right]^2 (1-x^2)^{l+1}} \\ &\text{et} \\ y &= A' U^{(n-l)}_{-\frac{2l+1}{2}} + B' U^{(n-l)}_{-\frac{2l+1}{2}} \int \frac{dx}{\left[U^{(n-l)}_{-\frac{2l+1}{2}}\right]^2 (1+x^2)^{l+1}}. \end{aligned} \right.$$

Les polynômes $X^{(n-l)}_{-\frac{2l+1}{2}}$, qui composent la première intégrale (13), sont les coefficients du développement de l'expression

$$(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-\frac{2l+1}{2}},$$

ordonné suivant les puissances croissantes de α. Ce développement est convergent, d'après la règle connue de convergence de la série de Lagrange, tant que l'on a $x<1$, c'est-à-dire tant que x reste dans le champ de variation assigné par sa définition analytique.

Le facteur P de Lamé a encore ici pour valeur

$$P_l^{(n)} = (1-x^2)^{\frac{l}{2}} X^{(n-l)}_{-\frac{2l+1}{2}},$$

et se trouve mis sous forme d'expression différentielle. Les propriétés analytiques sont celles de la fonction $P_l^{(n)}$ relative à la sphère. Le facteur R se met également sous la forme

$$R_l^{(n)} = (1+x^2)^{\frac{l}{2}} U^{(n-l)}_{-\frac{2l+1}{2}},$$

et il convient alors aux points intérieurs de l'ellipsoïde. La deuxième intégrale particulière, qui est fractionnaire, ne peut s'annuler pour aucune valeur réelle de x. Elle se rapporte, ainsi que M. Liouville en a fait la remarque (*Lettres à Blanchet, Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. XI), à l'occasion de l'ellipsoïde à trois axes inégaux, aux

points extérieurs au corps solide. D'ailleurs le polynôme $U^{(n-l)}_{-\frac{2l+1}{2}}$ est le coefficient de α^{n-l} dans le développement de l'expression

$$(1 - 2\alpha i x + \alpha^2)^{-\frac{2l+1}{2}},$$

ordonné suivant les puissances ascendantes de α.

Si, au lieu de prendre pour variables indépendantes des facteurs P et R les paramètres géométriques demi-axes polaires $\lambda' = cx$ et $\rho' = cx$, on prend $\lambda = \sqrt{c^2 - \lambda'^2}$ et $\rho = \sqrt{\rho'^2 - c^2}$, les équations différentielles (4) se transforment en

$$(4\ bis)\quad \begin{cases} (\lambda^4 - c^2\lambda^2)\dfrac{d^2P}{d\lambda^2} + (2\lambda^3 - c^2\lambda)\dfrac{dP}{d\lambda} = (h\lambda^2 - l^2c^2)P, \\ (\rho^4 - c^2\rho^2)\dfrac{d^2R}{d\rho^2} + (2\rho^3 - c^2\rho)\dfrac{dR}{d\rho} = (h\rho^2 - l^2c^2)R. \end{cases}$$

Dans ces équations, on a mis h au lieu de $n(n+1)$, et les paramètres λ et ρ sont les fonctions inverses des transcendantes

$$\beta = c\int_\lambda^c \frac{d\lambda}{\lambda\sqrt{c^2 - \lambda^2}},$$

$$\gamma = c\int_c^\rho \frac{d\rho}{\rho\sqrt{\rho^2 - c^2}}.$$

Les intégrales générales de ces équations (4 *bis*) se déduiront des valeurs (5), en y remplaçant, après avoir effectué les différentiations indiquées, x par $\sqrt{1 - x^2}$ dans la première, et par $\sqrt{x^2 - 1}$ dans la seconde. Les nouvelles variables x ont pour valeurs $x = \frac{\lambda}{c} = \frac{1}{E(\beta)}$ pour la première, et $x = \frac{\rho}{c} = \text{séc}\,\gamma$ pour la seconde. Les facteurs P et R s'obtiendront en fonction des nouvelles variables, en effectuant sur leurs valeurs, données plus haut, les mêmes changements ou substitutions.

§ XIII.

Le développement, par la formule de Lagrange, de la plus petite des racines de l'équation du second degré

$$u = ix + \alpha \frac{u^2 - 1}{2}$$

donne immédiatement

$$(1 - 2\alpha ix + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{i^{2n-1}}{2^n \Gamma(n+1)} \frac{d^n (x^2+1)^n}{dx^n} \alpha^n.$$

Le module d'une imaginaire étant positif, il résulte, des conditions connues de convergence de la formule de Lagrange, que ce développement est convergent dans toute l'étendue du plan. On peut d'ailleurs observer qu'il est égal à la somme de deux séries à termes alternativement positifs et négatifs, lesquels finissent toujours par être constamment et indéfiniment décroissants, et alors la règle de Leibnitz suffit pour conclure la convergence.

La différentiation *par rapport à x, l fois répétée,* des deux membres de l'équation précédente, conduit au développement suivant :

$$(1 - 2\alpha ix + \alpha^2)^{-\frac{2l+1}{2}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} U^{(n)}_{-\frac{2l+1}{2}} \alpha^n,$$

également convergent, *a fortiori,* dans toute l'étendue du plan, et où l'on a posé, pour abréger,

$$U^{(n)}_{-\frac{2l+1}{2}} = \frac{\Gamma(l+1)\, i^{2n+l-1}}{2^n \Gamma(2l+1)\Gamma(n+l+1)} \frac{d^{n+2l}(x^2+1)^{n+l}}{dx^{n+2l}}.$$

Sous cette forme, le théorème de Rolle, étendu par M. Liouville aux racines imaginaires des équations (*Journal de Mathématiques pures et appliquées,* 2[e] série, t. IX, p. 84), suffit pour montrer que l'équation

$$U^{(n)}_{-\frac{2l+1}{2}} = 0$$

a toutes ses racines imaginaires, inégales et comprises dans l'intérieur

d'un cercle dont le rayon est inférieur à l'unité. On voit, de plus, que les points racines de cette équation sont tous situés sur la partie de l'axe des y comprise dans l'intérieur du même cercle.

Trois fonctions consécutives de ce dernier développement satisfont à la relation suivante, où l'on a fait disparaître le signe imaginaire i en divisant par i^{2n+l-3} et remplaçant i^2 par -1 :

$$(6)\quad n\mathrm{U}^{(n)}_{-\frac{2l+1}{2}} - (2n+2l-1)x\mathrm{U}^{(n-1)}_{-\frac{2l+1}{2}} - (n+2l-1)\mathrm{U}^{(n-2)}_{-\frac{2l+1}{2}} = 0.$$

Une même fonction $\mathrm{U}^{(n)}_{-\frac{2l+1}{2}}$ et ses deux premières dérivées vérifient l'équation linéaire

$$(7)\qquad (1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + 2(l+1)x\frac{dy}{dx} - n(n+2l+1)y = 0,$$

où le signe imaginaire i a disparu, et dont l'intégrale générale s'obtient en remplaçant, dans la seconde des équations (5), $\mathrm{U}^{(n-l)}_{-\frac{2l+1}{2}}$ par $\mathrm{U}^{(n)}_{-\frac{2l+1}{2}}$.

L'intégration par parties conduit immédiatement au théorème

$$(8)\qquad \int_{-i}^{+i} \mathrm{U}^{(\nu)}_{-\frac{2l+1}{2}} \mathrm{U}^{(n)}_{-\frac{2l+1}{2}} dx = 0,$$

tant que ν diffère de n. Au moyen de la relation (6) entre trois fonctions consécutives, et en ayant égard à ce théorème (8), on trouve, dans le cas de $\nu = n$,

$$\int_{-i}^{+i} \left[\mathrm{U}^{(n)}_{-\frac{2l+1}{2}}\right]^2 dx = 2\,\frac{2l+1}{2n+2l+1}\,\frac{(n+2l)(n+2l-1)\ldots(2l+1)}{1.2.3.4\ldots n}\,i^{2n+1}.$$

Revenant au facteur $\mathrm{R}_l^{(n)}$ de Lamé, nous trouvons que trois fonctions $\mathrm{R}_l^{(n)}$, $\mathrm{R}_l^{(n-1)}$, $\mathrm{R}_l^{(n-2)}$, dans lesquelles l reste constant, satisfont à la relation

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &(1+x^2)^{\frac{l}{2}}\Big[(n-l)\mathrm{U}^{(n-l)}_{-\frac{2l+1}{2}} - (2n-1)x\mathrm{U}^{(n-l-1)}_{-\frac{2l+1}{2}} \\ &\qquad\qquad - (n+l+1)\mathrm{U}^{(n-l-2)}_{-\frac{2l+1}{2}}\Big] = 0, \end{aligned}\right.$$

où l'on a $l \leqq n$.

L'intégration par parties conduit au théorème

$$(10) \qquad \int_{-i}^{+i} R_l^{(n)} R_l^{(\nu)}\, dx = 0$$

tant que ν diffère de n. En se servant de ce théorème (10) et de la relation (9) entre trois fonctions consécutives, on trouve, dans le cas de $\nu = n$,

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_{-i}^{+i} (R_l^{(n)})^2\, dx &= \int_{-i}^{+i} (1+x^2)^l \left(U^{(n-l)}_{-\frac{2l+1}{2}}\right)^2 dx \\ &= 2\,\frac{2l+1}{2n+1}\,\frac{n+l.n+l-1.n+l-2\ldots 2l+1}{1.2.3.4\ldots n-l}\,\frac{2.4.6\ldots 2l}{3.5.7\ldots 2l+1}\, i^{2n-2l+1}. \end{aligned} \right.$$

Ainsi, le facteur $R_l^{(n)}$ se trouve également mis sous forme d'expression différentielle, et ses propriétés analytiques sont encore, comme on le voit, semblables à celles de la fonction $P_l^{(n)}$ relative à la sphère.

§ XIV.

Dans le cas de l'ellipsoïde ovaire, Lamé a ramené l'intégration de l'équation aux dérivées partielles du second ordre régissant l'équilibre de température des points intérieurs du corps supposé homogène, à celle des deux équations

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\left[(c^2-\nu^2)\dfrac{dP}{d\nu}\right]}{d\nu} &= \left(\frac{l^2c^2}{c^2-\nu^2} - h\right) P, \\ \frac{d\left[(\rho^2-c^2)\dfrac{dR}{d\rho}\right]}{d\rho} &= \left(\frac{l^2c^2}{\rho^2-c^2} + h\right) R. \end{aligned} \right.$$

Dans ces deux équations, on a $h = n(n+1)$,

$$\nu = \sqrt{c^2 - \nu'^2} = c\,\frac{\mathfrak{E}(\alpha)}{E(\alpha)},$$

$$\rho = \sqrt{\rho'^2 + c^2} = c\,\frac{E(\gamma)}{\mathfrak{E}(\gamma)}.$$

Les paramètres thermométriques α et γ sont définis par les intégrales

$$\alpha = c\int_{\nu'}^{c}\frac{d\nu}{\nu'\sqrt{c^2-\nu'^2}},$$

$$\gamma = c\int_{\rho'}^{\infty}\frac{d\rho'}{\rho'\sqrt{\rho'^2+c^2}}.$$

Enfin ν' et ρ' sont les fonctions inverses de ces deux transcendantes α et γ. En remplaçant $\frac{\nu}{c}$ et $\frac{\rho}{c}$ par x, dans les équations (12), on voit que les intégrales générales de ces équations ont la forme de la première des intégrales (5) de l'ellipsoïde planétaire. Les facteurs de Lamé, P et R, relatifs à l'ellipsoïde ovaire, ont donc la forme du facteur $P_l^{(n)}$ dans le cas de la sphère, et leurs propriétés analytiques sont encore les mêmes.

Les fonctions au moyen desquelles on exprime les intégrales des équations (12) sont les polynômes en x qui naissent du développement de l'expression $(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-\frac{2l+1}{2}}$ ordonné suivant les puissances ascendantes de α. D'après la règle de convergence de la série de Lagrange, appliquée au développement de la plus petite des racines de l'équation

$$u = x + \alpha\frac{u^2-1}{2},$$

ce développement est convergent tant que l'on a $x<1$ dans la première, et $x>1$ dans la seconde, ou bien, tant que x reste, dans les deux cas respectivement, dans le champ de variation assigné par sa définition analytique. Seulement, dans le second cas, on voit, par cette même règle, que, pour la convergence, on doit avoir $\alpha \leqq \frac{1}{2x}$, et que, par conséquent, quand x devient de plus en plus grand, on doit supposer α de plus en plus petit, ce qui est toujours permis.

Si, au lieu de prendre pour variables indépendantes ν et ρ, on prend $\nu'=\sqrt{c^2-\nu^2}$ et $\rho'=\sqrt{\rho^2-c^2}$, les équations (12) deviennent

$$(12\ bis)\quad \begin{cases} (\nu'^4-c^2\nu'^2)\dfrac{d^2P}{d\nu'^2}+(2\nu'^3-c^2\nu')\dfrac{dP}{d\nu'}=(h\nu'^2-l^2c^2)P,\\ (\rho'^4+c^2\rho'^2)\dfrac{d^2R}{d\rho'^2}+(2\rho'^3+c^2\rho')\dfrac{dR}{d\rho'}=(h\rho'^2+l^2c^2)R. \end{cases}$$

Leurs intégrales générales se déduisent de celles des équations (12), en changeant x en $\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{E(\alpha)}$ dans la premiere, et x en

$$\sqrt{x^2-1} = \frac{1}{\mathcal{E}(\gamma)}$$

dans la seconde. On obtient les nouveaux facteurs P et R en effectuant sur les anciens les mêmes changements de variables.

On sait que les formes analytiques sous lesquelles nous avons mis les facteurs P et R, que nous venons de trouver, ont été indiquées par M. Lionville dans les mêmes cas de la sphère et des ellipsoïdes de révolution (*Journal de Mathématiques pures et appliquées,* t. XI, p. 275). C'est en comparant les séries de Lamé, ordonnées suivant des produits de fonctions elliptiques, à celles ordonnées suivant les Y_n de la *Mécanique céleste,* que M. Liouville est parvenu à ces indications. On sait aussi, d'un autre côté, que Jacobi avait déjà mis les différents termes dont sont composés les Y_n sous cette même forme de produits d'expressions différentielles (*Journal de Liouville,* t. X, p. 229.)

Enfin, il importe de faire observer que les fonctions simples x, qui entrent dans les expressions des facteurs P et R, sont, dans tous les cas, des fonctions simplement périodiques, ou plus exactement, en ayant égard aux remarques présentées par Lamé dans la neuvième de ses *Leçons sur les fonctions inverses des transcendantes et les surfaces isothermes,* des fonctions doublement périodiques parvenues à cet état limite de déformation continue où une de leurs périodes est infinie.

Cinématique et Dynamique des ondes courantes sur un sphéroïde liquide. Application à l'évolution de la protubérance autour d'un sphéroïde liquide déformé par l'attraction d'un astre éloigné ;

Par M. GUYOU,

Lieutenant de vaisseau.

Équations des épicycloïdes.

Considérons (*Pl. I, fig.* 1) l'épicycloïde engendrée par le point M quand ce point est supposé invariablement lié au cercle aA qui roule intérieurement sur le cercle OA ; nous appellerons, suivant l'usage, le cercle aA *cercle roulant* ou *roulette,* le cercle OA cercle *base de la roulette,* et enfin nous donnerons à la circonférence décrite par le centre de la roulette le nom de circonférence *guide*.

Nous poserons

$$aA = \rho,$$
$$OA = \rho',$$
$$Oa = \rho' - \rho = R.$$

Si nous prenons pour axes de coordonnées les deux axes rectangulaires dont l'origine est en O et dont l'axe des Y est dirigé suivant le rayon Oa à l'instant où le point M se trouve sur cette direction et entre les deux circonférences R et ρ', nous aurons, en appelant θ l'angle AOA',

$$X = R\sin\theta - r\sin Y_1\, a_1\, A_1,$$
$$Y = R\cos\theta + r\cos Y_1\, a_1\, A_1,$$

et, comme $Y_1 a_1 A_1 = \frac{\rho' - \rho}{\rho}\theta = \frac{R}{\rho}\theta$, il vient

$$(1)\quad \begin{cases} X = R\sin\theta - r\sin\frac{R}{\rho}\theta, \\ Y = R\cos\theta + r\cos\frac{R}{\rho}\theta, \end{cases}$$

et enfin, en posant $\frac{R}{\rho} = n$,

$$(2)\quad \begin{cases} X = R\sin\theta - r\sin n\theta, \\ Y = R\cos\theta + r\cos n\theta. \end{cases}$$

Suivant les valeurs de n et de r pour une même circonférence guide, les épicycloïdes affecteront des formes diverses. Si n est un nombre entier, la courbe se composera d'une seule orbe sinueuse ondulant autour de la *circonférence guide;* si n est un nombre fractionnaire de la forme $\frac{p}{q}$, p et q étant premiers entre eux, le point M serpentera autour de la circonférence guide et ne repassera par les mêmes positions que lorsque le cercle roulant aura accompli q révolutions.

Enfin, dans le cas particulier de $n = 1$, on voit aisément que l'épicycloïde prend la forme d'une ellipse dont le grand axe est vertical et dont les axes sont

$$R + r \quad \text{et} \quad R - r.$$

Nous nous bornerons aux cas dans lesquels n est un nombre entier.

Tangentes et normales. — On sait que la normale à la courbe, à chaque point M_1, est dirigée suivant la ligne qui joint le point considéré au point de contact du cercle roulant avec le cercle base, c'est-à-dire suivant $M_1 A'$.

Les crêtes de la courbe seront situées sur les rayons vecteurs émanant du centre O qui feront avec l'axe OY des angles θ tels que l'on ait

$$A' a_1 M_1 = 2K\pi,$$

ou

$$\theta(n+1) = 2K\pi \quad \text{ou} \quad \theta = \frac{2K\pi}{(n+1)},$$

K étant un nombre quelconque; et les creux seront dans des positions telles que

$$A' a_1 M_1 = K\pi \quad \text{ou} \quad \theta = \frac{K}{(n+1)}\pi,$$

K étant un nombre impair quelconque. Si nous faisons dans cette formule $K = 1$, nous aurons la demi-amplitude angulaire de chaque onde, et, en appelant cette quantité Θ, on aura

$$(3) \qquad \Theta = \frac{\pi}{n+1}.$$

Le nombre des ondes sera égal à $\frac{2\pi}{2\Theta}$ ou $(n+1)$.

Le nombre des ondes de la courbe ne dépend que du paramètre n; on voit par suite que, si, conservant invariables le cercle guide, de rayon R, et le paramètre n, on fait varier la distance r du point traceur au centre de la roulette, on obtiendra une série de courbes analogues, présentant le même nombre de sinuosités et ayant leurs crêtes et leurs creux sur les mêmes rayons de la circonférence guide.

Si r est nul, la courbe se confond avec le cercle, et, si r augmente, les crêtes et les creux se dessineront de plus en plus, les courbures des crêtes seront plus accusées que celles des creux, et si r devenait égal à ρ, chaque crête présenterait un point de rebroussement; enfin, si r croissait encore, la courbe présenterait une boucle à chaque crête.

Nous ne nous occuperons que des cas dans lesquels r est plus petit que ρ, c'est-à-dire des courbes auxquelles on a donné le nom d'*épicycloïdes accourcies intérieures* ou, plus simplement, d'*hypocycloïdes accourcies*.

Cinématique des ondes hypocycloïdales.

Centres et rayons orbitaires des différents points d'une hypocycloïde donnée. — Considérons l'hypocycloïde définie par les paramètres R, r et n, n étant un nombre entier quelconque et $r < \rho$ ou $r < \frac{R}{n}$, et appelons *centre orbitaire* d'un point M_1 quelconque de la courbe le point a_1 du cercle guide où se trouverait le centre de la rou-

lette à laquelle serait lié le point M qui décrirait la courbe considérée, et *rayon orbitaire* le rayon $a_1 M_1$.

Imaginons que chacun des points de l'hypocycloïde envisagée soit relié par une tige invariable de longueur à son centre orbitaire, et que, chaque centre orbitaire restant immobile, tous les points de la courbe se mettent à tourner uniformément autour de leurs centres respectifs avec la même vitesse angulaire ε.

Si nous supposons, pour fixer les idées, que ce mouvement ait lieu de gauche à droite, et que nous prenions pour origine du temps l'instant où la courbe avait pour équations les équations (2), on voit aisément que la position du point dont le centre orbitaire est défini par l'angle θ sera donnée à l'instant t par les équations

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} X &= R\sin\theta - r\sin(n\theta - \varepsilon t),\\ Y &= R\cos\theta + r\cos(n\theta - \varepsilon t). \end{aligned}\right.$$

Il est facile de voir qu'à cet instant, bien que chacun des points ait changé de position, la courbe qui en est le lieu géométrique a conservé sa forme.

Considérons en effet le point qui, à l'origine du mouvement, se trouvait en une position M_1 telle que $A'a_1M_1 = \varepsilon t$; le centre orbitaire a_1 de ce point était situé dans une direction θ_1, telle que

$$(n+1)\theta_1 = \varepsilon t \quad \text{ou} \quad \theta_1 = \frac{\varepsilon}{(n+1)}t;$$

à l'instant t, ce point se trouvera sur la direction Oa_1 et sur le prolongement de ce rayon.

Prenons l'équation de la courbe par rapport à de nouveaux axes ayant même origine, mais dont l'axe OY' est dirigé suivant Oa_1; on aura, en prenant les formules connues de transformation,

$$\begin{aligned} X' &= X\cos\theta_1 - Y\sin\theta_1,\\ Y' &= Y\cos\theta_1 + X\sin\theta_1, \end{aligned}$$

et, en remplaçant dans ces formules X et Y par les valeurs (4),

$$\begin{aligned} X' &= R\sin\theta\cos\theta_1 - r\sin(n\theta - \varepsilon t)\cos\theta_1 - R\cos\theta\sin\theta_1 - r\cos(n\theta - \varepsilon t)\sin\theta_1,\\ Y' &= R\cos\theta\cos\theta_1 + r\cos(n\theta - \varepsilon t)\cos\theta_1 + R\sin\theta\sin\theta_1 - r\sin(n\theta - \varepsilon t)\sin\theta_1, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
X' &= R\sin(\theta - \theta_1) - r\sin(n\theta - \varepsilon t + \theta_1),\\
Y' &= R\cos(\theta - \theta_1) + r\cos(n\theta - \varepsilon t + \theta_1);
\end{aligned}$$

et si, comme précédemment, nous appelons θ' l'angle formé avec le nouvel axe des Y' par la direction dans laquelle se trouve le centre orbitaire qui était défini par θ par rapport aux anciens axes, nous aurons

$$\theta - \theta_1 = \theta' \quad \text{et} \quad n\theta - \varepsilon t + \frac{\varepsilon t}{n+1} = n\theta - n\frac{\varepsilon t}{n+1} \quad \text{ou} \quad n\theta',$$

et les équations précédentes deviendront

$$\begin{aligned}
X' &= R\sin\theta' - r\sin n\theta',\\
Y' &= R\cos\theta\ \ + r\cos n\theta'.
\end{aligned}$$

Ces équations sont identiques aux premières.

On voit, par suite, qu'aux yeux d'un observateur qui serait assez rapproché de la figure pour pouvoir suivre de l'œil les différents points dans leurs mouvements, ces mouvements auraient les caractères de mouvements oscillatoires desquels résulteraient à chaque instant et en chaque point des déformations périodiques de la courbe; et au contraire, aux yeux d'un observateur suffisamment éloigné pour ne plus pouvoir distinguer les points les uns des autres et pour apercevoir nettement la forme de la courbe sur laquelle ils sont répartis, cette courbe semblerait tourner tout d'une pièce vers la droite avec une vitesse angulaire uniforme égale à $\frac{\varepsilon}{n+1}$ autour de son centre.

Si nous imaginions enfin qu'on rapportât le mouvement dont il s'agit à des axes animés d'une vitesse de rotation égale à $\frac{\varepsilon}{n+1}$, les équations prendraient la forme

$$\begin{aligned}
X &= R\sin\frac{\varepsilon}{(n+1)}t - r\sin\frac{n\varepsilon}{(n+1)}t,\\
Y &= R\cos\frac{\varepsilon}{(n+1)}t + r\cos\frac{n\varepsilon}{(n+1)}t,
\end{aligned}$$

dans laquelle t représenterait l'intervalle écoulé depuis le moment où le point considéré a franchi la crête correspondant à l'axe des Y.

Et l'on voit qu'un observateur qui serait entraîné par le mouvement de ces axes verrait une courbe sinueuse immobile et de forme invariable sur laquelle s'écouleraient tous les points d'un mouvement continu, et le mouvement prendrait l'aspect d'un *écoulement linéaire permanent*.

On peut remarquer dès maintenant que les vitesses des points sur leur trajectoire permanente varieraient à chaque instant, atteignant leurs maxima dans les creux et leurs minima sur les crêtes, et que, par suite, bien que la série complète des points fasse constamment une ligne continue, la distance de deux points voisins subirait des accourcissements et des allongements périodiques.

Si nous appelons ∂X et ∂Y les accroissements des coordonnées d'un point M quand on passe au point suivant, défini par l'accroissement ∂t, c'est-à-dire au point qui a franchi l'axe des Y un intervalle ∂t avant le premier, les projections de l'arc $\partial\sigma$, qui sépare ces deux points sur la courbe, seront

$$\frac{\partial X}{\partial t}\partial t, \quad \frac{\partial Y}{\partial t}\partial t$$

et

$$\partial\sigma = \partial t\sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial t}\right)^2}.$$

On aurait de même, en appelant $d\sigma$ l'arc parcouru par le point M dans le temps dt,

$$\frac{d\sigma}{dt} = \sqrt{\frac{dX^2}{dt} + \left(\frac{dY}{dt}\right)^2} = v \quad \text{ou} \quad \partial\sigma = v\,\partial t;$$

par suite, l'écartement de deux points infiniment voisins sera toujours proportionnel à la vitesse [*].

Reprenons pour un instant l'hypocycloïde primitive et imaginons

[*] Cette propriété est évidemment indépendante de la forme de la courbe sur laquelle s'effectue le mouvement d'écoulement continu permanent; c'est la traduction, dans le cas des écoulements linéaires, de la loi d'égal débit.

que, dans l'intérieur de l'espace qu'elle enferme sur le plan de la figure, nous tracions une infinité de cercles de rayons décroissants autour du centre O, et que sur chacun d'eux, pris comme cercle guide, nous construisions des hypocycloïdes ayant même nombre d'ondes et ayant leurs crêtes et leurs creux sur les mêmes directions, et admettons que le rayon orbitaire r de chacune de ces hypocycloïdes soit une fonction du rayon R du cercle guide qui lui correspond exprimée par $f(\mathrm{R})$; les équations générales de ces courbes seront de la forme

$$(5)\qquad \begin{cases} \mathrm{X} = \mathrm{R}\sin\theta - f(\mathrm{R})\sin n\theta, \\ \mathrm{Y} = \mathrm{R}\cos\theta + f(\mathrm{R})\cos n\theta. \end{cases}$$

Il est aisé de voir que, si l'on fait varier θ de zéro à 2π et R de zéro à l'infini, tous les points du plan de la figure sont donnés par ces équations, et les paramètres R et θ qui définiraient chaque point déterminé par ses coordonnées X et Y seraient donnés par la résolution des équations (5) par rapport à ces deux inconnues.

Imaginons maintenant que, toutes ces hypocycloïdes étant tracées, et les centres orbitaires de chacun de leurs points restant immobiles, tous les points de toutes ces lignes, c'est-à-dire tous les points de la surface enfermée dans l'hypocycloïde extérieure, viennent à tourner d'un mouvement uniforme et avec la même vitesse angulaire ε autour de leurs centres orbitaires respectifs.

D'après ce que nous avons vu plus haut, toutes les hypocycloïdes sembleront tourner ensemble autour de leur centre commun avec une vitesse $\frac{\varepsilon}{n+1}$, et si, comme il nous est toujours permis de le supposer, la fonction $f(\mathrm{R})$ est d'une forme telle que, quelque voisines que soient deux hypocycloïdes correspondant à deux profondeurs R et $\mathrm{R} + d\mathrm{R}$ infiniment voisines, elles ne se coupent pas, aucun point ne sera gêné dans son mouvement par la rencontre d'un autre.

On voit en effet que chacun d'eux restera constamment sur une courbe qui ne rencontrera jamais la courbe voisine.

Mais, bien que ces points ne soient ainsi jamais exposés à se joindre, il arrivera, suivant la forme de la fonction $f(\mathrm{R})$, que les éléments superficiels, dans leurs mouvements, pourront subir des contractions ou

des dilatations périodiques analogues à celles que subissent les éléments rectilignes des courbes.

Nous allons chercher la forme que doit affecter cette fonction pour que, malgré leurs déformations perpétuelles, les éléments superficiels conservent la même aire.

Loi d'homogénéité. — Pour cela, considérons (*Pl. I, fig.* 2) les quatre centres orbitaires a, a', b, b' déterminés par les rayons R et R $+ d$R et les directions θ et $\theta + d\theta$; les quatre points M, M′, N, N′ correspondant à ces centres auront pour coordonnées, à l'instant t, les valeurs obtenues en donnant, dans les équations

$$(6) \qquad \begin{cases} X = R \sin\theta - f(R)\sin(n\theta - \varepsilon t) \\ Y = R\cos\theta + f(R)\cos(n\theta - \varepsilon t), \end{cases}$$

aux paramètres R et θ les valeurs successives suivantes :

Pour M . . . R et θ, Pour N. . . R $+ d$R et θ,
Pour M′. . . R et $\theta + d\theta$, Pour N′. . . R $+ d$R et $\theta + d\theta$;

et si, par l'un quelconque des quatre points M, M′, N, N′, le point M par exemple, nous menons une parallèle à l'axe des X, et que par les points N et M′ nous menions des parallèles NP et M′Q à l'axe des Y, nous aurons évidemment

$$\overline{NP} = \frac{dY}{dR}dR, \quad \overline{MP} = \frac{dX}{dR}dR, \quad \overline{M'Q} = -\frac{dY}{d\theta}d\theta, \quad \overline{MQ} = \frac{dX}{d\theta}d\theta.$$

D'un autre côté, si nous considérons tous les centres orbitaires compris sur les côtés du petit trapèze $aa'bb'$, les points mobiles correspondant à tous ces centres seront répartis sur quatre lignes enfermant un quadrilatère élémentaire MM′NN′, que nous pourrons regarder comme un parallélogramme si nous imaginons des points a, a', b, b' suffisamment rapprochés.

La surface de cet élément a pour expression

$$\overline{MN}.\overline{MM'}.\sin NMM'$$

ou, si l'on remarque que $\mathrm{NMM'} = \mathrm{NM}x + x\mathrm{MM'}$,

$$\overline{\mathrm{MN}}.\overline{\mathrm{MM'}}, \sin \mathrm{NM}x \cos x\mathrm{MM'} + \overline{\mathrm{MN}}.\overline{\mathrm{MM'}} \sin x\overline{\mathrm{MM'}} \cos \mathrm{NM}x\,;$$

mais

$$\sin \mathrm{NM}x\,\overline{\mathrm{MN}} = \overline{\mathrm{NP}}, \quad \overline{\mathrm{MN}} \cos \mathrm{NM}x = \overline{\mathrm{MP}},$$
$$\overline{\mathrm{MM'}} \cos x\mathrm{MM'} = \overline{\mathrm{MQ}}, \quad \overline{\mathrm{MM'}} \sin x\mathrm{MM'} = \overline{\mathrm{M'Q}}.$$

L'aire du parallélogramme élémentaire aura donc pour expression

$$\overline{\mathrm{NP}}.\,\overline{\mathrm{MQ}} + \overline{\mathrm{MP}}.\,\overline{\mathrm{M'Q}}$$

ou, en tenant compte des relations que nous venons d'établir,

$$(7) \qquad \left(\frac{d\mathrm{Y}}{d\mathrm{R}}\frac{d\mathrm{X}}{d\theta} - \frac{d\mathrm{Y}}{d\theta}\frac{d\mathrm{X}}{d\mathrm{R}}\right) d\theta\, d\mathrm{R}.$$

Chacune des quantités comprises dans cette formule est fonction de R, de θ et de t; on les obtiendra en différentiant les équations (6) par rapport à R et θ et l'on aura

$$\frac{d\mathrm{X}}{d\mathrm{R}} = \sin\theta - f'(\mathrm{R}) \sin(n\theta - \varepsilon t),$$
$$\frac{d\mathrm{Y}}{d\mathrm{R}} = \cos\theta + f'(\mathrm{R}) \cos(n\theta - \varepsilon t),$$
$$\frac{d\mathrm{X}}{d\theta} = \mathrm{R}\cos\theta - nf(\mathrm{R}) \cos(n\theta - \varepsilon t),$$
$$\frac{d\mathrm{Y}}{d\theta} = -\mathrm{R}\sin\theta - nf(\mathrm{R}) \sin(n\theta - \varepsilon t).$$

Les quantités R et θ, dR et $d\theta$, qui définissent le quadrilatère élémentaire considéré, sont invariables pendant le mouvement; il faudra donc que les termes que l'on obtiendrait en effectuant le calcul de la parenthèse de la formule (7), et qui seraient fonctions du temps, disparaissent eux-mêmes.

En se bornant à écrire ces termes, on trouve

$$\begin{aligned}
&-\mathrm{R}f'(\mathrm{R}) \sin\theta \sin(n\theta - \varepsilon t) - nf(\mathrm{R})f'(\mathrm{R}) \sin^2(n\theta - \varepsilon t)\\
&+ nf(\mathrm{R}) \sin\theta \sin(n\theta - \varepsilon t) - nf(\mathrm{R})f'(\mathrm{R}) \cos^2(n\theta - \varepsilon t)\\
&+ \mathrm{R}f'(\mathrm{R}) \cos\theta \cos(n\theta - \varepsilon t) - nf(\mathrm{R}) \cos\theta \cos(n\theta - \varepsilon t).
\end{aligned}$$

La somme des termes en $\sin^2(n\theta - \varepsilon t)$ et $\cos^2(n\theta - \varepsilon t)$ donne la quantité $-nf(\mathrm{R})f'(\mathrm{R})$ qui est indépendante du temps; les seuls termes fonctions du temps qui entreront dans l'expression de l'aire du quadrilatère élémentaire seront donc, après simplification, rédnits à l'expression

$$[\mathrm{R}f'(\mathrm{R}) - nf(\mathrm{R})][\cos(n\theta - \varepsilon t)\cos\theta - \sin(n\theta - \varepsilon t)\sin\theta]$$

ou

$$[\mathrm{R}f'(\mathrm{R}) - nf(\mathrm{R})]\cos[(n+1)\theta - \varepsilon t].$$

La condition nécessaire et suffisante pour que l'aire du parallélogramme élémentaire soit invariable pendant le mouvement sera donc exprimée par la relation

$$\mathrm{R}f'(\mathrm{R}) - nf(\mathrm{R}) = 0$$

ou

$$\frac{f'(\mathrm{R})}{f(\mathrm{R})} = \frac{n}{\mathrm{R}},$$

d'où l'on tire immédiatement

$$\log f(\mathrm{R}) = n\log\mathrm{R} + \mathrm{C}.$$

La valeur de la constante arbitraire C se déduira de la grandeur du rayon orbitaire de l'hypocycloïde extérieure; si nous appelons H ce rayon et A le rayon du cercle *guide* de cette hypocycloïde, on aura

$$\log\mathrm{H} = n\log\mathrm{A} + \mathrm{C}, \quad \text{d'où} \quad \mathrm{C} = \log\mathrm{H} - n\log\mathrm{A}.$$

On aura par suite

$$\log f(\mathrm{R}) = n.\log\mathrm{R} - n.\log\mathrm{A} + \log\mathrm{H}$$

ou

$$f(\mathrm{R}) = \mathrm{H}\left(\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{A}}\right)^n,$$

ou autrement

(8) $$r = \mathrm{H}\left(\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{A}}\right)^n.$$

Les équations (6) prendront donc la forme

$$(8')\qquad \begin{cases} X = R\sin\theta - H\left(\frac{R}{A}\right)^n \sin(n\theta - \varepsilon t), \\ Y = R\cos\theta + H\left(\frac{R}{A}\right)^n \cos(n\theta - \varepsilon t). \end{cases}$$

Aire du parallélogramme élémentaire. — Si nous introduisons dans l'expression générale de l'aire du parallélogramme élémentaire la condition exprimée par la formule (8), de laquelle résulte la nullité des termes fonction du temps, nous trouverons aisément, en remplaçant les quantités $\frac{dY}{dR}$, $\frac{dY}{d\theta}$, $\frac{dX}{dR}$, $\frac{dX}{d\theta}$ par leurs valeurs,

$$[+ R\sin^2\theta + R\cos^2\theta - nf(R)f'(R)]\,dR\,d\theta$$

ou

$$\left[+ R - nH\left(\frac{R}{A}\right)^n n\frac{H}{A^n}R^{n-1}\right]dR\,d\theta,$$

ou enfin

$$(9)\qquad \left(R - \frac{n^2H^2}{A^{2n}}R^{2n-1}\right)dR\,d\theta.$$

Nous remarquerons dès maintenant, dans l'expression (8), que r est nul pour $R = 0$, quelles que soient les valeurs de H, A et n, et nous voyons également, dans l'expression (9), que l'aire du parallélogramme élémentaire compris entre les quatre points dont les centres orbitaires sont définis par R, θ, $R + dR$, $\theta + d\theta$ est indépendante de θ.

Supposons maintenant que, après avoir tracé sur une circonférence guide de rayon $R = A$ l'hypocycloïde accourcie de rayon $r = H$ et définie par le paramètre n, nous tracions, par rapport aux différents cercles, de dR en dR dans l'intérieur du premier, les hypocycloïdes de même nombre d'ondes semblablement placées et telles, que leurs rayons décroissent en se rapprochant du centre O suivant la loi

$$(8)\qquad r = H\left(\frac{R}{A}\right)^n,$$

on verra aisément (*Pl. I, fig.* 1) que les points de toutes ces courbes

qui ont leurs centres orbitaires sur le même rayon Oa_1 auront également leurs rayons orbitaires parallèles, et que, si l'on prenait pour axes de coordonnées une ligne parallèle à a_1MA_1 (axe des r) et la ligne Oa_1 (axe des R), la courbe formée par l'ensemble de ces points aurait pour équation l'équation (8).

Nous donnerons aux ligues formées par tous les points qui ont leurs centres orbitaires sur le même rayon le nom de *rayons curvilignes* de l'hypocycloïde.

On voit que l'équation générale des rayons curvilignes dont il s'agit est, par rapport aux axes convenables pour chacun d'eux,

$$r = \mathrm{H}\left(\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{A}}\right)^n \text{ [*]}.$$

---

[*] On aurait l'équation de l'une quelconque de ces lignes par rapport aux axes primitifs en éliminant R entre les équations (8'), et l'on verrait facilement que cette élimination donnerait toujours une équation du degré n. On a, en effet,

$$\mathrm{X}\cos\theta = \mathrm{R}\sin\theta\cos\theta - \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{A}^n}\mathrm{R}^n\cos\theta\sin(n\theta - \varepsilon t),$$

$$\mathrm{Y}\sin\theta = \mathrm{R}\sin\theta\cos\theta + \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{A}^n}\mathrm{R}^n\sin\theta\cos(n\theta - \varepsilon t),$$

$$(\mathrm{X}\cos\theta - \mathrm{Y}\sin\theta) = -\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{A}^n}\mathrm{R}^n\sin[(n+1)\theta - \varepsilon t],$$

de même

$$\mathrm{X}\cos(n\theta - \varepsilon t) = \mathrm{R}\sin\theta\cos(n\theta - \varepsilon t) - \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{A}^n}\mathrm{R}^n\sin(n\theta - \varepsilon t)\cos(n\theta - \varepsilon t),$$

$$\mathrm{Y}\sin(n\theta - \varepsilon t) = \mathrm{R}\cos\theta\sin(n\theta - \varepsilon t) + \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{A}^n}\mathrm{R}^n\sin(n\theta - \varepsilon t)\cos(n\theta - \varepsilon t),$$

d'où

$$\mathrm{X}\cos(n\theta - \varepsilon t) + \mathrm{Y}\sin(n\theta - \varepsilon t) = \mathrm{R}\sin[(n+1)\theta - \varepsilon t];$$

tirant enfin de cette équation la valeur de R et élevant à la puissance n et substituant dans les précédentes, il viendrait

$$\mathrm{Y}\sin\theta - \mathrm{X}\cos\theta = \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{A}^n}\left\{\frac{\mathrm{X}\cos(n\theta - \varepsilon t) + \mathrm{Y}\sin(n\theta - \varepsilon t)}{\sin[(n+1)\theta - \varepsilon t]}\right\}^n,$$

équation du degré (n), ce qui était d'ailleurs évident d'avance.

Par suite, dans le cas de l'ellipse (*fig.* 5), on aura

$$n = 1, \quad r = \mathrm{H}\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{A}};$$

les rayons hypocycloïdaux sont rectilignes.

Pour les hypocycloïdes à trois ondes, les rayons hypocycloïdaux sont des arcs de paraboles

$$r = \mathrm{H}\left(\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{A}}\right)^2.$$

Les rayons curvilignes sont tangents en O à leurs rayons des centres orbitaires; on a, en effet,

$$\frac{dr}{d\mathrm{R}} = \frac{\mathrm{H}n}{\mathrm{A}^n}\mathrm{R}^{n-1};$$

donc $\frac{dr}{d\mathrm{R}} = 0$ pour $\mathrm{R} = 0$ [*]; par suite, le rayon curviligne est tangent à l'axe des R pour chaque courbe et au centre de la figure.

Si, de même que nous avons tracé sur la figure les hypocycloïdes voisines, nous tracions également les rayons curvilignes séparés par des intervalles $d\vartheta$, nous partagerions toute l'aire de la figure en une infinité d'éléments analogues à celui que nous avons appelé *parallélogramme élémentaire*.

L'aire de chacun de ces éléments est égale, comme nous l'avons vu, à $\left(\mathrm{R} - \frac{n^2\mathrm{H}^2}{\mathrm{A}^{2n}}\mathrm{R}^{2n-1}\right)d\mathrm{R}\,d\vartheta$.

Il en résulte donc que tous ceux d'entre eux qui sont situés dans la bande sinueuse comprise entre deux hypocycloïdes voisines sont équivalents; et l'on verra aisément maintenant que, si l'on suppose que la figure prenne le mouvement oscillatoire général défini par la rotation orbitaire ε, l'un quelconque de ces éléments affectera successivement toutes les formes de ceux qui sont compris dans une même onde (*Pl. I, fig.* 3), et son aire restera invariable.

---

[*] Excepté dans les cas de l'ellipse ou $n = 1$ et $\frac{dr}{d\mathrm{R}} = \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{A}}$ const.: dans ces cas, les rayons hypocycloïdaux sont rectilignes.

Si maintenant nous considérons la bande comprise entre deux rayons curvilignes séparés par un intervalle $d\theta$, nous aurons pour aire

$$d\theta \int_0^A \left(R - \frac{n^2 H^2}{A^{2n}} R^{2n-1}\right) dR$$

ou

$$d\theta \left(\frac{A^2}{2} - \frac{nH^2}{2}\right).$$

Il est encore évident que, si nous partageons toute la surface de l'hypocycloïde extérieure en bandes analogues définies par des intervalles $d\theta$ égaux, toutes ces bandes seront égales entre elles, et, quand toute la figure se mettra à osciller, chacune d'elles affectera successivement les formes de toutes celles qui sont comprises dans une même onde; elles prendront un mouvement oscillatoire analogue à celui qu'indique la *fig.* 4 de la *Pl. I,* et dont les oscillations des verges peuvent être prises pour image.

Aire de l'hypocycloïde. — Nous remarquerons ici, en passant, que l'intégration par rapport à θ de la formule qui précède entre les limites o et 2π nous donnera l'aire de la courbe entière :

$$\pi(R^2 - nH^2).$$

Cercle primitif. — Et si nous supposions que toute la surface oscillante vînt à s'affaisser sous la forme d'un cercle, le rayon A_1 de ce cercle, que nous appellerons *cercle primitif*, aura pour expression

$$A_1^2 = A^2 - nH^2. \tag{10}$$

Mouvement relatif. — Si maintenant nous imaginions que l'observateur qui contemple ce mouvement fût entraîné avec des axes animés d'un mouvement de rotation uniforme autour du point O et de vitesse égale à $\frac{\varepsilon}{n+1}$, nous pourrions remarquer tout d'abord que les mouvements des différents points relativement les uns aux autres ne changeraient pas, et que, par suite, les déformations diverses des éléments resteraient les mêmes, ainsi que leurs aires.

Mais chacun d'eux semblerait, au lieu d'osciller en se déformant, s'écouler dans le canal étroit formé par deux hypocycloïdes voisines, se rétrécissant en s'allongeant pour conserver la même aire dans les parties resserrées de son filet, et s'élargissant en se raccourcissant dans les parties plus larges.

Nous avons vu plus haut, en étudiant le mouvement linéaire, que la longueur de chaque élément linéaire hypocycloïdal était proportionnelle à sa vitesse à chaque instant; il en résulte que la distance normale de deux hypocycloïdes voisines, dans la loi que nous avons donnée, est inversement proportionnelle à la vitesse; cette propriété pourrait aisément se démontrer directement.

Nous voyons par là que le mouvement oscillatoire dont nous nous occupons peut être transformé en un mouvement d'écoulement permanent, par une simple rotation des axes.

Le mouvement ondulatoire hypocycloïdal est ainsi entièrement défini au point de vue cinématique dans le plan; il serait facile de déduire de ce qui précède une variété infinie de mouvements plus complexes et satisfaisant également à la loi d'homogénéité.

Si nous projetions, en effet, la figure en mouvement sur un plan incliné quelconque, les éléments superficiels qui étaient égaux entre eux le seraient encore en projection; les cercles guides, les cercles primitifs, les orbites circulaires des points deviendraient des ellipses semblables et parallèles, sur lesquels ils se déplaceraient en suivant la loi des aires; enfin, si, faisant passer le plan de projection par le centre O, nous le faisions tourner autour d'un axe perpendiculaire à la figure sans changer son inclinaison, le mouvement oscillatoire se projetterait suivant un mouvement satisfaisant encore à la loi d'homogénéité et dans lequel les orbites se déformeraient constamment, présentant ainsi les aspects les plus variés et les plus complexes.

Cinématique à trois dimensions.

Nous pouvons évidemment considérer la figure que nous venons d'étudier comme la section droite d'un cylindre liquide animé d'un mouvement tel, que tout ce qui se passe dans la section envisagée se passe

également dans toutes les autres, et ce mouvement d'oscillation générale du liquide se traduira à nos yeux par le roulement perpétuel d'une série de cannelures hypocycloïdales à la surface libre.

Nous pouvons de même supposer que les tranches successives, bien que de formes identiques, ne soient pas semblablement tournées, et imaginer, par exemple, qu'à chaque instant le volume liquide affecte la forme qu'engendrerait l'hypocycloïde si on la transportait uniformément le long d'une perpendiculaire à son plan pendant qu'elle tournerait uniformément sur elle-même, et le corps liquide affecterait la forme d'un cylindre recouvert de cannelures à sections droites hypocycloïdales et contournées en hélice; et, dans le mouvement oscillatoire général dont nous avons parlé, ces cannelures sembleraient rouler uniformément sur la surface libre, imitant aux yeux le mouvement d'une vis menée par un écrou qui glisserait sans tourner dans la direction de son axe.

Nous pouvons enfin considérer une sphère, imaginer cette sphère coupée par des plans parallèles voisins, tracer sur chacun d'eux des hypocycloïdes ayant même nombre d'ondes, et dont les rayons orbitaires r suivraient la loi exprimée par la formule

$$r = \mathrm{H}\left(\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{A}}\right)^n,$$

R représentant le rayon du cercle détaché par chaque plan sécant et A le rayon de la sphère; et, imaginant enfin que nous fassions la même opération à l'intérieur pour toutes les sphères concentriques, nous aurions, en supposant tous les points de la masse animés d'une rotation constante ε autour de leurs centres orbitaires, un nouvel exemple de mouvement oscillatoire vérifiant la loi d'homogénéité, qui se traduirait aux yeux de l'observateur par le roulement d'ondes cannelées sur la surface libre du sphéroïde liquide.

Nous voyons enfin qu'en général, si nous considérions une masse liquide telle, que toutes les sections obtenues en la coupant par des plans parallèles fussent des hypocycloïdes ayant même paramètre n, c'est-à-dire de même nombre d'ondes, et que le mouvement fût tel que nous venons de le dire dans chacune de ces sections, quel que puisse être d'ailleurs le rapport de H à A pour chacune d'elles, cette

masse serait encore animée d'un mouvement possible au point de vue cinématique.

Nous pourrions de la même manière substituer aux mouvements circulaires les mouvements elliptiques obtenus en projetant les derniers soit sur un plan constant, soit sur un plan d'inclinaison constante, mais animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe perpendiculaire à la figure.

Mais tous ces mouvements ondulatoires ne présentent pour le moment d'autre intérêt que de familiariser l'esprit avec ces images nouvelles, c'est-à-dire d'habituer à suivre par l'imagination les divers éléments liquides dans leurs déplacements et leurs déformations; il n'y a pas lieu de s'y arrêter dans ce Mémoire.

Nous n'étudierons au point de vue dynamique que deux cas :

1° Le cas du cylindre à cannelures ou ondes hypocycloïdales parallèles à l'axe, c'est-à-dire celui dans lequel tout se passe exactement de la même manière dans chaque section droite, et nous appliquerons cette étude au cas d'un canal creusé le long d'un grand cercle de la Terre et la pénétrant jusqu'à son centre;

2° Le cas des déformations ondulatoires d'un ellipsoïde, qui est directement applicable à la marée produite par l'attraction d'un astre sur un sphéroïde liquide et qui est susceptible de jeter quelque jour sur cet important et obscur problème.

Premier cas. — Nous n'aurons évidemment pas à nous étendre sur la description de ce mouvement, qui est entièrement défini par le mouvement superficiel que nous avons décrit pour le plan de la section droite du cylindre liquide.

Nous nous bornerons à remarquer que chaque hypocycloïde représentera sur le plan de la section droite la trace d'une surface cylindrique droite à directrice hypocycloïdale, que les rayons curvilignes de la figure représenteront également la trace de surfaces cylindriques, et que, par suite, le mouvement des lames liquides comprises entre deux de ces surfaces voisines sera fidèlement représenté par le mouvement oscillatoire des bandes superficielles comprises entre deux rayons curvilignes.

Deuxième cas. — Le deuxième cas est plus intéressant au point de vue cinématique.

Imaginons, en effet, un ellipsoïde quelconque défini par les trois axes A, B, C, et supposons que, par une série de plans parallèles entre eux et perpendiculaires à l'un des axes, l'axe C par exemple, nous le divisions en tranches minces. Nous pouvons, comme nous l'avons vu, considérer chacune des ellipses semblables détachées dans cette figure par les plans sécants comme des hypocycloïdes dont le paramètre n a pour valeur 1, et les paramètres R et r seront définis par les relations

$$R + r = a,$$
$$R - r = b.$$

en appelant a et b les axes des ellipses des diverses sections, correspondant aux axes A et B de la section principale AB.

L'équation de l'ellipsoïde, par rapport à trois axes de coordonnées rectangulaires coïncidant avec ses axes principaux, est de la forme

$$\frac{X^2}{A^2} + \frac{Y^2}{B^2} = 1 - \frac{Z^2}{C^2} = \frac{C^2 - Z^2}{C^2};$$

par suite, les axes des diverses sections elliptiques correspondant aux diverses valeurs de z auront pour expression

$$a^2 = \frac{A^2(C^2 - Z^2)}{C^2},$$
$$b^2 = \frac{B^2(C^2 - Z^2)}{C^2},$$

et les rayons R et r des cercles guides et des cercles orbitaires des différentes ellipses auront pour valeur

$$R = \frac{a + b}{2}, \quad r = \frac{a - b}{2},$$

d'où

$$R = \frac{A + B}{2C}\sqrt{(C^2 - Z^2)}, \quad r = \frac{A - B}{2C}\sqrt{C^2 - Z^2};$$

et les équations de ces ellipses pourront se mettre sous la forme

$$X = \frac{A + B}{2C}\sqrt{C^2 - Z^2}\sin\theta - \frac{A - B}{2C}\sqrt{C^2 - Z^2}\sin\theta,$$
$$Y = \frac{A + B}{2C}\sqrt{C^2 - Z^2}\cos\theta + \frac{A - B}{2C}\sqrt{C^2 - Z^2}\cos\theta,$$

d'où évidemment l'élimination de θ ramènerait l'équation de l'ellipsoïde.

Les coordonnées R et θ du centre orbitaire d'un point quelconque de l'ellipsoïde, X, Y, Z, seraient fournies par les relations

$$R = \frac{A+B}{2C}\sqrt{C^2 - Z^2}$$

et

$$\sin\theta = \frac{XC}{B\sqrt{C^2 - Z^2}},$$

ou encore

$$\cos\theta = \frac{YC}{A\sqrt{C^2 - Z^2}}.$$

Enfin, si nous appelons χ, γ, ζ les coordonnées rectangulaires du centre d'oscillation d'un point qui aurait pour coordonnées X, Y, Z, on aurait

$$\zeta = Z,$$
$$\chi = R\sin\theta = \frac{A+B}{2C}\sqrt{C^2 - Z^2}\sin\theta,$$
$$\gamma = R\cos\theta = \frac{A+B}{2C}\sqrt{C^2 - Z^2}\cos\theta,$$

et l'élimination de θ et Z entre ces trois équations donnera

$$\left(\frac{A+B}{2C}\right)^2 (C^2 - \zeta^2) = \chi^2 + \gamma^2,$$

ou enfin

$$\chi^2\left(\frac{2}{A+B}\right)^2 + \gamma^2\left(\frac{2}{A+B}\right)^2 + \zeta^2\left(\frac{1}{C}\right)^2 = 1,$$

équation d'un ellipsoïde de révolution autour de l'axe des ζ, que l'on peut appeler l'ellipsoïde des centres orbitaires de l'ellipsoïde donné A, B, C par rapport à l'axe C.

A chaque point de la surface de l'ellipsoïde donné correspondra un point de l'ellipsoïde que nous venons de définir, et, si nous imaginons

que chacun des points du premier (*Pl. I, fig.* 5) vienne à tourner autour de son point correspondant du second avec une vitesse angulaire ε uniforme et égale pour tous les points, nous verrons que chacune des ellipses planes que nous avions déterminées par les sections perpendiculaires à l'axe C, conservant exactement ses dimensions et sa forme, semblera tourner autour de son centre avec une vitesse égale à $\frac{\varepsilon}{2}$. Dans ce genre de mouvement oscillatoire, l'ellipsoïde donné conserverait donc sa forme extérieure ; mais, bien que chacun de ses points ne décrirait qu'une orbite circulaire, la *forme* du corps semblerait tourner uniformément sur elle-même avec une vitesse égale à $\frac{\varepsilon}{2}$.

Enfin il est facile de voir que, si nous imaginions que tous les points des sections planes comprises dans l'intérieur des diverses ellipses venaient à tourner avec la même vitesse angulaire ε autour de leurs centres orbitaires respectifs, toute la masse du liquide que nous pouvons imaginer former le corps considéré serait animée d'un mouvement oscillatoire général, qui se traduirait aux yeux par une rotation apparente du corps demeurant invariable, et, de plus, la loi d'homogénéité serait rigoureusement vérifiée [*].

APPLICATIONS DYNAMIQUES.

Théorie dynamique des ondes courantes dans un disque liquide compris entre deux plans parallèles voisins menés de chaque côté d'un grand cercle d'un sphéroïde liquide.

Hypothèses. — Nous considérerons le cas d'une sphère liquide soumise à la loi de la gravitation universelle, c'est-à-dire dont toutes les parcelles exercent les unes sur les autres une attraction proportionnelle à leurs masses et réciproque aux carrés de leurs distances.

---

[*] Tous les mouvements que nous venons de définir jouissent d'une propriété générale assez curieuse, dont nous avons donné la démonstration dans la *Théorie mécanique de la houle:*

Le centre de gravité d'une portion quelconque de la masse liquide animée de ce mouvement oscillatoire décrit un cercle d'un mouvement uniforme.

Nous admettrons en outre que le canal est suffisamment étroit pour que l'on puisse considérer les pesanteurs comme égales et parallèles sur toute la longueur d'une ligne traversant le canal ou plutôt le disque liquide perpendiculairement à ses deux parois.

Enfin, nous admettrons que les rayons orbitaires des molécules sont assez petits, relativement au rayon de la sphère, pour que l'on puisse considérer la pesanteur de chaque molécule, à chaque phase de ses oscillations, comme égale et parallèle à celle qu'elle subirait si elle était placée immobile à son centre orbitaire.

Il est aisé de voir que, en appliquant ces hypothèses à une sphere liquide de la dimension de la Terre, on pourrait encore, sans commettre d'erreur sensible, attribuer aux ondes que nous étudierons une largeur et une hauteur beaucoup supérieures aux dimensions que nous rencontrons dans la nature, et il est évident, par ailleurs, que les composantes ainsi négligées sont encore sensiblement inférieures aux forces passives qu'on laisse de côté en imaginant le liquide sans viscosité.

Nous aurions pu, d'ailleurs, introduire dans les formules les vraies composantes de la pesanteur, développer leurs expressions en fonction de l'épaisseur du canal et du rayon orbitaire des ondes, et remarquer que, ces quantités étant très-petites, nous pouvions négliger les ermes où elles entrent à la deuxième puissance; mais cette manière de procéder compliquerait l'analyse sans rien ajouter à la rigueur des déductions. Les plus hautes ondes de la mer n'atteignent, en effet, jamais des hauteurs supérieures à 11 mètres, et ces hauteurs mesurées de crêtes en creux correspondent à des rayons orbitaires superficiels de $5^{m},50$.

Il résulte des hypothèses que nous venons d'exposer que toutes les forces agissant dans les diverses tranches minces du disque liquide considéré seront les mêmes que celles qui agissent dans la tranche mince qui coïncide avec le grand cercle de la sphère, et que, pour les forces comme pour le mouvement, nous pourrons nous borner à étudier ce qui se passe dans la surface d'une section droite du disque.

Soit donc A le rayon de la circonférence extérieure guide du disque hypocycloïdal considéré, H le rayon orbitaire de ses ondes superfi-

cielles, et prenons les équations connues du mouvement

$$(12)\qquad \begin{cases} X = R\sin\theta - H\left(\dfrac{R}{A}\right)^n \sin(n\theta - \varepsilon t), \\ Y = R\cos\theta + H\left(\dfrac{R}{A}\right)^n \cos(n\theta - \varepsilon t); \end{cases}$$

soit G l'intensité de la pesanteur sur les molécules superficielles.

La surface libre doit être surface de niveau.

A l'instant t, la direction de la tangente à la courbe est donnée par le rapport

$$\frac{\dfrac{dY}{d\theta}}{\dfrac{dX}{d\theta}}$$

au point occupé par la molécule qui a pour coordonnées orbitaires A et θ.

Les composantes de l'accélération totale seront

$$\frac{d^2X}{dt^2} \quad \text{et} \quad \frac{d^2Y}{dt^2},$$

celles de la pesanteur

$$-G\sin\theta, \qquad -G\cos\theta.$$

Pour que la surface libre soit surface de niveau, il est nécessaire que la résultante de l'accélération totale et d'une accélération égale et contraire à G soit normale à cette surface ; cette condition s'exprimera donc par la relation

$$\frac{\dfrac{dY}{d\theta}}{\dfrac{dX}{d\theta}} = -\frac{\dfrac{d^2X}{dt^2} + G\sin\theta}{\dfrac{d^2Y}{dt^2} + G\cos\theta};$$

or on a

$$\frac{dY}{d\theta} = -A\sin\theta - nH\sin(n\theta - \varepsilon t),$$

$$\frac{dX}{d\theta} = \quad A\cos\theta - nH\cos(n\theta - \varepsilon t),$$

$$\frac{d^2X}{dt^2} = \quad \varepsilon^2 H\sin(n\theta - \varepsilon t),$$

$$\frac{d^2Y}{dt^2} = -\varepsilon^2 H\cos(n\theta - \varepsilon t).$$

L'expression précédente, après la substitution de ces valeurs à $\frac{dX}{d\theta}$, $\frac{dY}{d\theta}$, $\frac{d^2X}{dt^2}$, $\frac{d^2Y}{dt^2}$, deviendra

$$\frac{-A\sin\theta - nH\sin(n\theta - \varepsilon t)}{A\cos\theta - nH\cos(n\theta - \varepsilon t)} = -\frac{\varepsilon^2 H\sin(n\theta - \varepsilon t) + G\sin\theta}{-\varepsilon^2 H\cos(n\theta - \varepsilon t) + G\cos\theta};$$

effectuant les calculs et simplifiant, il restera

$$Gn = \varepsilon^2 A$$

ou

(13) $$\varepsilon^2 = \frac{Gn}{A},$$

condition remarquablement simple.

Le paramètre ε était le seul que nous eussions conservé indéterminé dans les équations (12) ; ces équations seront désormais complétement définies sous la forme

$$X = R\sin\theta - H\left(\frac{R}{A}\right)^n \sin\left(n\theta - \sqrt{\frac{Gn}{A}}\,t\right),$$
$$Y = R\cos\theta + H\left(\frac{R}{A}\right)^n \cos\left(n\theta - \sqrt{\frac{Gn}{A}}\,t\right)$$

Nous allons voir que les conditions dynamiques du mouvement seront remplies dans la masse lorsqu'elles le seront à la surface libre.

Soient, en effet, R et θ les coordonnées orbitaires d'un point intérieur de la masse, g l'accélération de la pesanteur en ce point. Le sphéroïde étant supposé liquide et par suite homogène, on sait que, si l'on appelle R et A les distances de deux points quelconques au centre, on a

$$\frac{g}{R} = \frac{G}{A} \text{ [*]}:$$

[*] Cette loi n'est évidemment rigoureuse que dans le cas où la masse liquide serait tout à fait sphérique, où les molécules seraient toutes concentrées à leurs centres orbitaires propres, et l'on sait, du reste, que cela n'est pas rigoureusement possible, puisque la sphère primitive aurait un rayon plus faible que A; mais le véritable rayon ne diffère de A que d'un infiniment petit de l'ordre de ceux que nous avons négligés dans nos hypothèses.

par suite, on a

$$\frac{gn}{R} = \frac{Gn}{A} = \varepsilon^2.$$

Cette condition est précisément celle qui exprime que tous les points de l'hypocycloïde correspondant au cercle R se meuvent, comme ceux de la surface libre, sur une surface de niveau.

Loi de la pression dans la masse. — On le verrait, du reste, en posant

$$\frac{dp}{d\theta} = \frac{dp}{dX}\frac{dX}{d\theta} + \frac{dp}{dY}\frac{dY}{d\theta},$$

et comme on sait, appelant δ la densité du liquide,

$$\frac{dp}{dX} = -\delta\left(\frac{d^2X}{dt^2} + g\sin\theta\right),$$
$$\frac{dp}{dY} = -\delta\left(\frac{d^2Y}{dt^2} + g\cos\theta\right),$$

et par suite, en substituant,

$$\frac{dp}{d\theta} = -\delta\left[\left(\frac{d^2X}{dt^2} + g\sin\theta\right)\frac{dX}{d\theta} + \left(\frac{d^2Y}{dt^2} + g\cos\theta\right)\frac{dY}{d\theta}\right];$$

nous venons de voir que le terme entre crochets était identiquement nul quand on avait $\varepsilon^2 = \frac{gn}{R}$.

Pour trouver la loi de croissance des pressions en fonction du rayon R, nous prendrons la formule

$$\frac{dp}{dR} = \frac{dp}{dX}\frac{dX}{dR} + \frac{dp}{dY}\frac{dY}{dR}:$$

or on a, en différentiant les équations par rapport à R,

$$\frac{dX}{dR} = \sin\theta - \frac{nH}{A^n}R^{n-1}\sin(n\theta - \varepsilon t),$$
$$\frac{dY}{dR} = \cos\theta + \frac{nH}{A^n}R^{n-1}\cos(n\theta - \varepsilon t).$$

et, en remplaçant $\frac{dp}{dX}$, $\frac{dp}{dY}$, $\frac{dX}{dR}$, $\frac{dY}{dR}$ par leurs valeurs, il viendra

$$\begin{aligned}\frac{1}{\delta}\frac{dp}{dR} = &-\left[\varepsilon^2 H\left(\frac{R}{A}\right)^n \sin(n\theta - \varepsilon t) + g\sin\theta\right]\left[\sin\theta - \frac{nH}{A^n}R^{n-1}\sin(n\theta - \varepsilon t)\right]\\ &-\left[-\varepsilon^2 H\left(\frac{R}{A}\right)^n \cos(n\theta - \varepsilon t) + g\cos\theta\right]\left[\cos\theta + \frac{nH}{A^n}R^{(n-1)}\cos(n\theta - \varepsilon t)\right];\end{aligned}$$

effectuant les calculs,

$$\begin{aligned}&+\varepsilon^2 H\left(\frac{R}{A}\right)^n\left[\cos(n\theta - \varepsilon t)\cos\theta - \sin(n\theta - \varepsilon t)\sin\theta\right]\\ &+\frac{n\varepsilon^2 H^2}{A^{2n}}R^{2n-1} - g - \frac{gnH}{A^n}R^{(n-1)}\left[\cos(n\theta - \varepsilon t)\cos\theta - \sin(n\theta - \varepsilon t)\sin\theta\right],\end{aligned}$$

et, si l'on remarque que $\varepsilon^2 = \frac{gn}{R}$, il restera

$$\frac{1}{\delta}\frac{dp}{dR} = n\frac{\varepsilon^2 H^2}{A^{2n}}R^{2n-1} - g,$$

ou enfin

$$\frac{1}{\delta}\frac{dp}{dR} = n\frac{\varepsilon^2 H^2}{A^{2n}}R^{2n-1} - \frac{\varepsilon^2}{n}R,$$

et en intégrant

$$\frac{1}{\delta}p = \frac{\varepsilon^2 H^2}{2}\left(\frac{R}{A}\right)^{2n} - \frac{\varepsilon^2 R^2}{2n} + C.$$

La constante se déterminera par la condition de pression P de la surface libre,

$$P = \delta\left(\frac{\varepsilon^2 H^2}{2} - \frac{\varepsilon^2 A^2}{2n}\right) + C\delta,$$

d'où

$$C = \frac{P}{\delta} - \frac{\varepsilon^2 H^2}{2} + \frac{\varepsilon^2 A^2}{2n},$$

et par suite

$$\frac{1}{\delta}p = \frac{1}{\delta}P + \frac{\varepsilon^2 H^2}{2}\left[\left(\frac{R}{A}\right)^{2n} - 1\right] + \frac{\varepsilon^2}{2n}(A^2 - R^2),$$

ou

$$p - P = \frac{\varepsilon^2\delta}{2n}(A^2 - R^2) - \frac{\varepsilon^2 H^2\delta}{2}\left[1 - \left(\frac{R}{A}\right)^{2n}\right].$$

Considérons maintenant le cas où la sphère liquide serait animée d'un mouvement de rotation autour d'un axe perpendiculaire au disque que nous avons envisagé, et où cette rotation serait assez lente pour que la déformation du sphéroïde qui en résulterait n'altérât pas les attractions propres [*] de chaque molécule, en d'autres termes, pour que l'ellipsoïde de révolution dont le sphéroïde affecterait la forme différât peu de la sphère.

Il est aisé de voir que, si l'on appelait ω la vitesse, comptée dans le même sens que les angles θ, de la rotation du sphéroïde, c'est-à-dire la vitesse, par rapport à des axes immobiles dans l'espace absolu, d'axes par rapport auxquels le mouvement oscillatoire aurait pour équations les équations (12), les équations du mouvement par rapport aux axes fixes prendraient la forme

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} X &= R\sin(\theta+\omega t) - H\left(\frac{R}{A}\right)^n \sin[n\theta-(\omega+\varepsilon)t],\\ Y &= R\cos(\theta+\omega t) + H\left(\frac{R}{A}\right)^n \cos[n\theta-(\omega+\varepsilon)t],\end{aligned}\right.$$

ou, pour la surface libre,

$$\begin{aligned} X &= A\sin(\theta+\omega t) - H\sin[n\theta-(\omega+\varepsilon)t],\\ Y &= A\cos(\theta+\omega t) + H\cos[n\theta-(\omega+\varepsilon)t],\end{aligned}$$

dans lesquelles θ continuerait à représenter l'angle du rayon vecteur du centre orbitaire du point considéré avec l'axe mobile des Y par rapport auquel cet angle reste constant.

Nous tirerons de ces équations

$$\begin{aligned} \frac{dX}{d\theta} &= A\cos(\theta+\omega t) - nH\cos[n\theta-(\omega+\varepsilon)t],\\ \frac{dY}{d\theta} &= -A\sin(\theta+\omega t) - nH\sin[n\theta-(\omega+\varepsilon)t].\end{aligned}$$

[*] Par attraction propre nous entendrons ici l'attraction newtonienne; cette attraction se combinera nécessairement à la force centrifuge, et ce sont précisément les modifications apportées aux formules par l'influence de cette dernière force que nous allons faire connaître.

et en outre

$$\frac{dX}{dt} = \quad A\,\omega\cos(\theta + \omega t) + H(\omega + \varepsilon)\cos[n\theta - (\omega + \varepsilon)t],$$
$$\frac{dY}{dt} = -A\,\omega\sin(\theta + \omega t) + H(\omega + \varepsilon)\sin[n\theta - (\omega + \varepsilon)t],$$

et enfin

$$\frac{d^2X}{dt^2} = -A\,\omega^2\sin(\theta + \omega t) + H(\omega + \varepsilon)^2\sin[n\theta - (\omega + \varepsilon)t],$$
$$\frac{d^2Y}{dt^2} = -A\,\omega^2\cos(\theta + \omega t) - H(\omega + \varepsilon)^2\cos[n\theta - (\omega + \varepsilon)t],$$

et si nous appelons G l'attraction absolue exercée par le sphéroïde sur chacun des points de la surface libre, et en remarquant que cette attraction, dirigée constamment par hypothèse suivant le rayon vecteur du centre orbitaire, fait avec l'axe des Y un angle égal à $(\theta + \omega t)$, la condition pour que la surface libre soit surface de niveau sera exprimée par la relation

$$\frac{\frac{dX}{d\theta}}{\frac{dY}{d\theta}} = -\frac{\frac{d^2X}{dt^2} + G\cos(\theta + \omega t)}{\frac{d^2X}{dt^2} + G\sin(\theta + \omega t)};$$

posant, pour simplifier,

$$\theta + \omega t = \varphi,$$
$$n\theta - (\omega + \varepsilon)t = \pi,$$

et effectuant les calculs, on trouverait

$$[n\,A\,\omega^2 + A(\omega + \varepsilon)^2 - Gn]\sin(\pi + \varphi) = 0,$$

ou

$$\{[n\omega^2 + (\omega + \varepsilon)^2]A - Gn\}\sin[(n + 1)\theta - \varepsilon t] = 0,$$

relation qui ne peut être vérifiée à tous les instants du mouvement que si l'on a identiquement

$$[n\omega^2 + (\omega + \varepsilon)^2]A = Gn,$$

ou

$$(\omega + \varepsilon)^2 A = (G - \omega^2 A)n.$$

Et si nous appelons ε_1 la vitesse, par rapport aux axes fixes, de la rotation des rayons orbitaires de chacune des molécules de la masse, et G_1 la pesanteur apparente au point occupé par son centre d'oscillation, nous aurons

$$\varepsilon_1 = \omega + \varepsilon,$$
$$G_1 = G - \omega^2 A,$$

et la formule que nous venons d'établir prendra la forme

$$(15) \qquad \varepsilon_1^2 = \frac{G_1 n}{A},$$

formule identique à celle que nous avions obtenue dans le cas du mouvement absolu [*].

Remarque. — Les conditions dynamiques exprimées par les relations (13) et (15) auraient pu être établies par des démonstrations géométriques basées sur la méthode des tangentes de Roberval et sur les règles simples de la composition des accélérations.

Applications.

1° *Sphéroïde liquide fixe.* — En remplaçant dans les équations (12) la quantité ε par sa valeur (13), les équations générales du mouvement oscillatoire hypocycloïdal dans un disque liquide relativement étroit ont pris la forme

$$X = R\sin\theta - H\left(\frac{R}{A}\right)^n \sin\left(n\theta - \sqrt{\frac{G}{A}}\,nt\right),$$

et

$$Y = R\cos\theta + H\left(\frac{R}{A}\right)^n \cos\left(n\theta - \sqrt{\frac{G}{A}}\,nt\right);$$

[*] Néanmoins il importe de remarquer ici que la vitesse de propagation des ondes par rapport à un observateur entraîné par le sphéroïde serait

$$\frac{\varepsilon}{n+1} \quad \text{ou} \quad \frac{\varepsilon_1 - \omega}{n+1},$$

ou enfin

$$\frac{\sqrt{\frac{Gn}{R}} - \omega}{n+1}.$$

le mouvement sera donc complétement défini pour un sphéroïde donné par les quantités A et G et par les valeurs attribuées aux paramètres H et n; et il importe de ne pas oublier que nous avons supposé H très-petit par rapport à A et que n est un nombre entier.

La quantité H représente, comme on sait, la demi-hauteur des ondes estimée sur le rayon ; quant au paramètre n, sa nature rendrait sa mesure directe impossible à un spectateur du phénomène, et il est préférable, dans les applications, de le transformer; nous avons vu qu'en appelant Θ la demi-amplitude angulaire des ondes on avait

$$\Theta = \frac{\pi}{n+1}, \quad \text{d'où} \quad n = \frac{\pi - \Theta}{\Theta},$$

ou bien, si nous appelons L la demi-longueur de l'arc de grand cercle de la sphère occupé par chaque onde,

$$n = \frac{\pi A - L}{L}.$$

La forme des ondes est donc entièrement déterminée quand on connaît la demi-hauteur H et la demi-longueur L ; et le paramètre H est astreint à la condition

$$H < \rho, \quad \text{ou} \quad H < \frac{n}{A}, \quad \text{ou} \quad H < \frac{\pi A - L}{LA},$$

qui exprime que l'hypocycloïde est une hypocycloïde accourcie.

Enfin nous allons voir que, pour que le mouvement soit possible au point de vue dynamique, il faut que ces ondes se propagent sur le grand cercle avec une vitesse déterminée, fonction des paramètres de l'hypocycloïde.

La vitesse angulaire de propagation est égale, comme nous l'avons vu, à $\frac{\varepsilon}{n+1}$, et l'on a

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{Gn}{A}};$$

la vitesse angulaire de propagation sera donc égale à

$$\frac{\varepsilon\Theta}{\pi} \quad \text{ou} \quad \frac{\Theta}{\pi}\sqrt{\frac{Gn}{A}}$$

et la vitesse linéaire à

$$\frac{A\Theta}{\pi}\sqrt{\left(\frac{G\pi A - L}{AL}\right)},$$

ou

$$V = \frac{L}{\pi}\sqrt{\frac{G(\pi A - L)}{AL}} = \sqrt{\frac{GL}{\pi} - \frac{GL^2}{\pi^2 A}}.$$

Enfin, si nous appelons T la demi-période des oscillations, on aurait

$$T = \frac{L}{V} = \sqrt{\frac{\pi^2 AL}{G(\pi A - L)}}.$$

2° *Sphéroïde liquide animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe perpendiculaire au plan du disque liquide considéré.* — Nous appliquerons cette étude au cas d'un canal liquide pénétrant la Terre jusqu'à son centre et compris dans la zone équatoriale.

En définissant, comme dans le cas précédent, la forme des ondes du canal par leurs paramètres H et L, ces paramètres seraient naturellement encore liés entre eux par la relation

$$H < \frac{\pi A - L}{LA} \quad \text{et} \quad \frac{\pi A - L}{L} = \text{nombre entier}.$$

Nous allons faire voir que, comme dans le cas précédent, les ondes se propageraient avec la même vitesse suivant que le sens de la propagation sera dirigé vers l'est ou vers l'ouest.

En appelant G_1 la pesanteur apparente, ω la vitesse de rotation de la Terre et ε la rotation orbitaire des molécules par rapport à un observateur entraîné dans le mouvement, nous avons trouvé plus haut (15)

$$(\omega + \varepsilon)^2 = \frac{G_1 n}{A};$$

ε étant considéré comme positif quand les ondes se propagent dans le même sens que ω, c'est-à-dire vers l'est, nous aurons pour les deux cas

1° Propagation des ondes vers l'est...... $\varepsilon = \sqrt{\frac{G_1 n}{A}} - \omega$;

2° » » vers l'ouest... $\varepsilon = \omega - \sqrt{\frac{G_1 n}{A}}$.

Ces deux quantités sont égales à des signes contraires ; il en résulte donc que les vitesses des propagations seront égales.

La vitesse angulaire de propagation serait $\frac{\varepsilon}{n+1}$ et la vitesse linéaire $\frac{A\varepsilon}{n+1}$, et par conséquent

$$V = \sqrt{\frac{G_1 L}{\pi} - \frac{G_1 L^2}{\pi^2 A} - \frac{\omega L}{\pi}}.$$

En remplaçant, dans cette formule, G_1 par la valeur de l'accélération de la pesanteur à la surface de la Terre, ω par la vitesse angulaire de la rotation diurne, A par la valeur du rayon de la Terre à l'équateur, et enfin π par sa valeur connue, nous aurions l'expression de la vitesse de propagation des ondes en fonction de leur demi-longueur L.

Et si nous considérions des ondes telles que leur longueur L ne dépassât pas quelques centaines de mètres, on verrait aisément que cette expression se réduirait, avec une très-grande approximation, pour la Terre, à

$$V = \sqrt{\frac{G_1 L}{\pi}} \ [*],$$

formule que nous trouverons dans quelques lignes pour le cas de la houle trochoïdale.

Enfin il importe, avant de terminer, de rappeler que toute la théorie *dynamique* qui précède est basée sur l'hypothèse que le rayon orbitaire H des molécules superficielles est assez faible pour que l'on puisse admettre que l'action de la Terre sur chacune d'elles soit à chaque instant la même que si la molécule se trouvait à son centre orbitaire ; on voit aisément que, dans le cas actuel, la valeur de H pourrait être portée, sans altérer les conséquences de la théorie, à plusieurs centaines de mètres, c'est-à-dire à une dimension de beaucoup supérieure à celle des ondes que nous rencontrons dans la nature.

En outre, on remarquera que nous avons supposé que le canal équatorial que nous avons considéré s'étendait jusqu'au centre de la Terre et que cette hypothèse était nécessaire à la continuité ; mais on recon-

[*] On a en effet, approximativement, pour la Terre,

$$\frac{G_1 L^2}{\pi^2 A} = \frac{G_1 L^2}{\pi\, 20000000} \quad \text{et} \quad \frac{\omega L}{\pi} = \frac{L}{43200}.$$

naît facilement que la loi de décroissance des rayons orbitaires des molécules liquides en fonction de la profondeur,

$$r = H\left(\frac{R}{A}\right)^n,$$

est extrêmement rapide, et que, par suite, ce mouvement est très-faible à des profondeurs encore voisines de la surface libre, et enfin que les influences négligées en supposant un canal de quelques centaines de mètres de profondeur seraient encore d'un ordre beaucoup inférieur à celui de la viscosité, qui a été laissée également de côté.

Application à la houle trochoïdale. — Comme dernière application, il est intéressant de déduire de la théorie qui précède, en faisant $A = \infty$ par rapport à H et à L, la théorie de la houle trochoïdale, qui fait depuis quelques années, en France et en Angleterre, l'objet de l'étude des personnes qui s'occupent de la science du navire.

Loi de continuité ou d'homogénéité. — La loi d'homogénéité a été exprimée par la formule

$$r = H\left(\frac{R}{A}\right)^n$$

ou

$$r = H\left(\frac{R}{A}\right)^{\frac{\pi A - L}{L}}.$$

Dans le cas de $A = \infty$, cette formule prend une forme illusoire; mais, si nous reprenons l'équation différentielle de laquelle cette relation a été tirée, nous avons

$$\frac{dr}{dR} = n\frac{r}{R} = \frac{r}{\rho} = \frac{\pi r}{L};$$

et, en prenant pour coordonnée Z la distance du centre orbitaire de chaque point à l'horizontale des centres orbitaires de la surface libre, on aura

$$dR = -dz,$$

d'où

$$\frac{dr}{dz} = -\frac{\pi r}{L}$$

ou

$$\frac{dr}{r} = -\frac{\pi}{L}dz,$$

et enfin

$$r = He^{\left(-\frac{\pi z}{L}\right)} \text{ (formule connue).}$$

Condition dynamique. — Cette condition est exprimée par la relation

$$\varepsilon^2 = \frac{gn}{R} = \frac{g}{\rho},$$

d'où nous tirons

$$\varepsilon^2 = \frac{\pi g}{L} \text{ (formule connue).}$$

Ligne du niveau primitif. — Nous avons trouvé pour rayon du cercle dont la surface égale celle de l'hypocycloïde

$$A_1^2 = A^2 - nH^2,$$

d'où

$$A^2 - A_1^2 = nH^2 = \frac{H^2 A}{\rho} = \frac{H^2 \pi A}{L},$$

d'où

$$A - A_1 = \frac{\pi H^2 A}{(A + A_1)L} = \frac{\pi H^2}{\left(1 + \frac{A_1}{A}\right)L},$$

et, comme il est aisé de le voir, $\frac{A_1}{A} = 1$ pour H constant et $A = \infty$; on a donc, en appelant ζ l'ordonnée de la ligne de niveau primitif au-dessous de la ligne des centres orbitaires des molécules de la surface libre,

$$\zeta = \frac{\pi H^2}{2L} \text{ (formule connue).}$$

C'est, comme on sait, la moitié de la hauteur du point d'inflexion de la trochoïde au-dessus de la ligne des centres orbitaires.

Vitesse de propagation. — Enfin on trouverait aussi facilement

$$V = \sqrt{\frac{GL}{\pi}}.$$

Période des ondes. — Et

$$T = \sqrt{\frac{\pi L}{G}} \text{ (formules connues).}$$

On voit, par ce qui précède, que la théorie de la houle trochoïdale ne peut être considérée que comme une première approximation dans l'étude du phénomène des ondes courantes sur la sphère terrestre, puisqu'on y néglige à la fois la rotondité de la Terre, son mouvement de rotation et les variations de la gravité avec la profondeur.

Théorie de l'onde de marée produite sur un sphéroïde liquide par un astre éloigné.

Avant d'entreprendre l'explication dynamique du phénomène, il est indispensable d'ajouter quelques développements à l'étude de la Cinématique des déformations oscillatoires d'une surface plane hypocycloïdale, dans le cas particulier où l'hypocycloïde est une ellipse.

On sait que, dans ce cas, les équations du mouvement prennent la forme

$$X = R \sin\theta - H \frac{R}{A} \sin(\theta - \varepsilon t),$$

$$Y = R \cos\theta + H \frac{R}{A} \cos(\theta - \varepsilon t).$$

Si l'on élimine R entre ces deux équations, on trouvera une équation du premier degré qui représentera à chaque instant une ligne droite passant par l'origine. On sait que cette ligne est ce que nous avons appelé, dans le cas général, un rayon curviligne de l'hypocycloïde, et l'on voit aisément que l'équation de cette ligne représentera, si l'on fait varier t, le mouvement oscillatoire d'une droite qui joindrait constamment l'origine à un point qui parcourrait d'un mouvement uniforme l'orbite d'une molécule superficielle.

Si l'on éliminait θ, au contraire, l'équation résultante représenterait à chaque instant une ellipse de même forme et de même dimension à tous les instants, mais qui semblerait animée d'un mouvement de rotation uniforme égal à $\frac{\varepsilon}{2}$ autour de son centre.

La *fig.* 5 de la *Pl. I* représente dans deux positions différentes l'ellipse extérieure sur cette figure : chacun des points a décrit autour de son centre orbitaire un arc de 80 degrés, et l'ellipse a pris une position inclinée de 40 degrés sur la première. Les ellipses intérieures seraient soumises à des déformations semblables.

La bande liquide comprise entre deux lignes de molécules correspondant à deux valeurs voisines de θ, θ et $\theta + d\theta$, prendrait les mouvements oscillatoires représentés par les *fig.* 6 et 7 de la *Pl. I*, et la *fig.* 6 représente en $MM'NN'$, $M_1 M'_1 N_1 N'_1$ et $M_2 M'_2 N_2 N'_2$ les déformations et les oscillations périodiques du parallélogramme élémentaire compris entre les quatre points qui ont leurs centres orbitaires définis par R, $R + dR$, θ et $\theta + d\theta$.

Imaginons maintenant que nous prenions une masse liquide affectant la forme d'un ellipsoïde de révolution et que par l'axe de cet ellipsoïde nous fassions passer un plan ; imaginons en outre que nous déterminions dans cet ellipsoïde, par des plans parallèles à ce dernier et très-voisins, des sections elliptiques semblables ; à chacun des points de chacune des ellipses considérées correspondra nécessairement dans son plan un centre orbitaire, et, dans chaque ellipse supposée animée du mouvement oscillatoire hypocycloïdal, les molécules qui se trouvaient à un instant sur un même rayon continueront à s'y trouver à tous les instants; par suite, si nous venions à tracer dans le corps l'axe compris dans le plan équatorial et perpendiculaire aux plans sécants, et que par cet axe nous venions à faire passer des plans faisant entre eux de petits angles $d\theta$, toutes les molécules liquides comprises à un instant donné dans l'un d'eux continueraient à rester dans un plan, et les onglets détachés par ces plans dans la masse seraient soumis à des déformations et à des oscillations périodiques représentées pour toutes les sections droites par les *fig.* 5 et 6 de la *Pl. I*.

Enfin, chacune des tranches minces comprises dans chaque onglet entre deux sections droites conserverait même surface de base et même hauteur; leurs volumes seraient donc constants.

Le mouvement oscillatoire général jouirait donc de la propriété d'homogénéité, et il se traduirait, aux yeux de l'observateur immobile, par le roulement de la protubérance du sphéroïde autour d'un axe perpendiculaire au plan primitif mené par l'axe de révolution.

Étude dynamique. — On sait que, si l'on considère une masse liquide dont toutes les parties sont soumises à la loi de la gravitation, et isolée dans l'espace, cette masse prend la forme d'une sphère parfaite, et, si l'on suppose que cette masse vienne à être l'objet de l'attraction d'un astre éloigné, elle prendra la forme d'un ellipsoïde de révolution allongé vers ses pôles, dont l'axe serait dirigé vers l'astre en question. (Cela n'est exactement vrai, comme on le sait, qu'à la condition de supposer l'astre assez éloigné pour que l'on puisse considérer les actions qu'il exerce sur toutes les parcelles de la masse comme parallèles, et de supposer, en outre, la déformation assez petite pour que l'on puisse négliger les modifications de l'attraction totale du sphéroïde sur chaque molécule.)

Si nous imaginions maintenant que l'astre se mît à tourner autour du centre du sphéroïde, nous voyons aisément que, pour que dans chacune de ces positions la masse liquide fût en équilibre, il faudrait qu'elle présentât sa protubérance à l'astre à chaque instant; et, par suite, si nous supposions que l'astre décrivît son orbite en vingt-quatre heures, on obtiendrait l'effet dont il s'agit en imaginant que chacune des molécules de la masse fût animée, autour de son centre orbitaire, d'une vitesse de rotation égale au double de la précédente, c'est-à-dire telle qu'elle décrivît son orbite en douze heures.

Pour que ce mouvement fût possible au point de vue dynamique, il faudrait que, à chaque instant, les forces d'inertie de chaque molécule fissent équilibre aux actions qu'elle éprouve à la fois de la part du sphéroïde, de l'astre, et du liquide qui l'entoure, et comme, d'ailleurs, nous avons vu que ces dernières forces se faisaient précisément équilibre, à l'état statique il faudrait que les forces d'inertie et les modifications éprouvées par les pressions fussent rigoureusement nulles, ce qui n'est pas ici.

Néanmoins, en ne sortant pas de la limite des approximations qu'on a eues pour objet dans ce problème, on verrait aisément que ces quantités pourraient être négligées par rapport aux forces en jeu, lorsque, comme dans le cas de la Terre et de la Lune, la protubérance du sphéroïde est très-faible par rapport au rayon, et que le mouvement angulaire de l'astre attirant est suffisamment lent.

Sphéroïde liquide, animé d'un mouvement de rotation sur lui-même.

En faisant les mêmes hypothèses que dans le cas précédent, on démontrerait de la même manière qu'un sphéroïde liquide animé d'un mouvement de rotation sur lui-même, soumis à l'influence d'un astre éloigné situé dans le plan de son équateur, a pour forme d'équilibre un ellipsoïde à trois axes inégaux dont le grand axe est dirigé sur l'astre attirant.

Si nous menions à un instant donné l'équateur du sphéroïde [*] et une série de plans sécants parallèles à lui, et que, considérant chacune des sections elliptiques déterminées, nous supposions chacune d'elles animée du mouvement oscillatoire que nous avons défini, et tel que la vitesse de rotation orbitaire soit égale au double de la rotation diurne ω et dans le sens opposé à cette vitesse, nous verrions immédiatement que le sphéroïde se déformerait dans son mouvement, de manière à présenter sans cesse sa protubérance à l'astre attirant et affectant constamment par rapport à ce dernier sa forme d'équilibre.

Et si l'astre, au lieu d'être immobile, était animé d'un mouvement propre Ω, dans le plan de l'équateur, en faisant $\varepsilon = 2(\omega + \Omega)$, le même phénomène se produirait, et ici, comme dans le cas précédent, il est aisé de voir que les forces d'inertie peuvent être considérées comme négligeables par rapport aux forces en jeu sur chaque molécule, dans les circonstances où la protubérance elliptique est assez faible et où le mouvement de rotation ε est suffisamment lent [**].

Les circonstances dans lesquelles nous nous sommes placés sont, à

---

[*] Cet équateur est ici un des plans principaux de l'ellipsoïde qui passe par le grand axe.

[**] On voit aisément que les deux questions qui précèdent sont traitées rigoureusement au point de vue cinématique pur, et que les appréciations qui les accompagnent au point de vue dynamique sont basées sur ce principe général d'Hydrodynamique, que, dans un liquide dont les dernières parcelles sont animées de mouvements très-lents, c'est-à-dire tels que les vitesses et les forces d'inertie soient très-faibles relativement aux forces extérieures en jeu, on peut, dans l'étude dynamique du mouvement, né-

la vérité, trop éloignées de celles dans lesquelles se trouve la Terre, pour que la théorie qui précède soit directement applicable à l'étude du phénomène des marées ; néanmoins, elle permet de voir comment l'onde peut se transporter dans les grands océans sans produire de courant, et par un déplacement orbitaire très-lent et de moins d'un mètre d'amplitude de toutes les molécules liquides.

---

gliger les résistances passives et attribuer aux pressions les valeurs qu'elles auraient si la masse considérée était immobile sous l'action de ces forces extérieures.

Cette dernière propriété, moins évidente que la précédente, ressort immédiatement des équations connues

$$\frac{1}{\delta}\frac{dp}{dx} = X - u',$$

$$\frac{1}{\delta}\frac{dp}{dy} = Y - v',$$

$$\frac{1}{\delta}\frac{dp}{dz} = Z - w',$$

dans lesquelles il suffit de faire u', v', w' nuls pour retrouver les équations de l'Hydrostatique.

LÉGENDE DE LA PLANCHE I.

Fig. 3. — 1, 2, 3, 4, 5, 6. Formes diverses affectées par un même parallélogramme élémentaire pendant le passage de l'onde.

Fig. 4. — 1. Position de la bande liquide au moment du passage de la crête ;
3. » au moment du passage du creux ;
2, 4. Positions intermédiaires sur l'un et l'autre revers de l'onde.

De l'emploi de la Géométrie pour résoudre certaines questions de moyennes et de probabilités ;

Par M. L. LALANNE,

Inspecteur général des Ponts et Chaussées.

---

1. *Dans le nombre infini de triangles possibles dont les côtés ne sont assujettis qu'à la condition d'être compris entre deux limites connues a et b, quelles sont les valeurs moyennes des trois côtés, rangés préalablement par ordre de grandeur ?*

Telle est la question à laquelle on est conduit lorsque l'on cherche si quelque loi a présidé à la distribution des agglomérations de population de même ordre à la surface d'un territoire; car, si par exemple il existait une tendance de nature à placer ces agglomérations à des distances égales les unes des autres, malgré les inégalités très-apparentes qui existent entre quelques-unes de ces distances, les moyennes des plus petits, des moyens et des plus grands côtés des triangles formés en joignant deux à deux les centres de population, de manière à couvrir le territoire d'un réseau de mailles triangulaires, différeraient assurément d'une manière notable des moyennes calculées dans l'hypothèse où tous les triangles auraient été également possibles.

2. Cette question, qui présente ainsi un double intérêt, au point de vue qu'Ampère appelait *toporistique,* comme au point de vue purement mathématique, ne laisse pas d'être assez délicate à traiter par l'Analyse. Mais de simples considérations de Géométrie et de Statique élémentaire permettent de la résoudre, sans autre difficulté que celle qui résulte de la construction d'un solide polyédrique dont toutes les faces sont

rigoureusement déterminées en situation, et par conséquent en grandeur vraie, dans l'espace, et du calcul des coordonnées du centre de gravité de ce solide.

Supposons que les trois côtés variables de chacun des triangles en nombre infini que l'on peut construire soient représentés par les coordonnées rectangulaires x, y, z d'un même point de l'espace, l'axe des z étant vertical; supposons, de plus, que ces côtés, compris entre les limites a et b, soient rangés par ordre de grandeurs croissantes. On ne tardera pas à reconnaître que la portion de l'espace dont tous les points auront des coordonnées satisfaisant à la condition d'être les trois côtés d'un des triangles possibles sera soit un tétraèdre, soit un polyèdre à cinq faces, qui est la différence entre deux pyramides triangulaires.

En effet, le plus petit côté x devant être tout au moins égal à a et le plus grand z tout au plus égal à b, on a d'abord

(1) et (1 *bis*) $$x \geqq a, \quad z \leqq b.$$

Ensuite, les coordonnées étant rangées par ordre de grandeur, on a

(2) et (2 *bis*) $$x \leqq y, \quad y \leqq z.$$

Enfin, pour que le triangle soit possible, le plus grand côté doit être plus petit que la somme des deux autres, d'où

(3) $$z \leqq x + y.$$

Dans chacune de ces cinq relations, il ne faut retenir que le signe d'égalité, qui exprime le terme extrême, pour déterminer la région limitée de l'espace dans l'intérieur de laquelle les coordonnées de tous les points satisfont à ces mêmes conditions considérées avec le double signe. La première (1) représente un plan vertical parallèle aux zy, à la distance a. La seconde (1 *bis*) détermine un plan horizontal à la distance b des xy. La troisième (2) donne un plan vertical passant par l'axe des z et divisant en deux parties égales l'angle des xy. La quatrième (2 *bis*) fournit un plan passant par l'axe des x et divisant en deux parties égales l'angle des yz. Enfin, à la cinquième (3) correspond un plan passant par l'origine, dont la trace sur le plan des xy

partage en deux l'angle des $-x+y$ et dont l'inclinaison sur le plan horizontal a $\sqrt{2}$ pour tangente trigonométrique.

Le pentaèdre déterminé par ces cinq plans est représenté sur les *fig.* 1, 2 et 3, dans lesquelles $O'B = a$, et $O'C = O'B' = BB'' = b$, par les projections orthogonales des six sommets et des neuf arêtes sur les

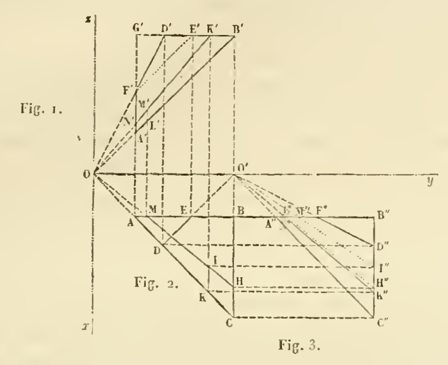


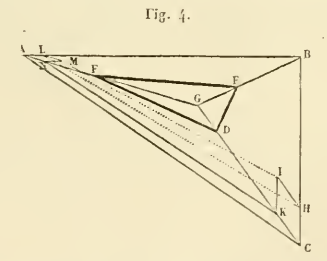
Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.

trois plans des coordonnées, le plan vertical des yz étant rabattu (*fig.* 1) sur le plan horizontal des xy, autour et au-dessus de l'axe des y, pris comme charnière, et le plan vertical des zx étant rabattu pareillement (*fig.* 3) sur ce même plan horizontal, vers la droite, mais en prenant pour charnière la ligne $O'C$ parallèle à l'axe des x et à une distance $OO' = b$ de cet axe.

Fig. 4.



La *fig.* 4 est une perspective de ce solide, l'œil étant placé dans le dièdre des $(z+x)$, $(z-y)$ à une certaine hauteur au-dessus du

plan horizontal. Cette perspective met en évidence les six sommets A, B, C, D, E, F, ainsi que les deux tétraèdres GABC, GDEF, dont le pentaèdre est la différence.

5. L'étude simultanée des quatre figures conduit facilement à la détermination des dimensions métriques de toutes les faces de ces solides et des coordonnées de leurs sommets.

Pour faciliter cette étude, nous avons donné aux trois projections les mêmes lettres qu'aux points correspondants de la perspective de la *fig.* 4, en supprimant même les accents dans la *fig.* 2. On remarquera seulement que les points F et G de la perspective, qui se projettent en F′ et en G′ sur la *fig.* 1, en F″ et en G″ sur la *fig.* 3, se projettent en A sur la *fig.* 2.

Il suffira maintenant d'énoncer les résultats qui ressortent de l'examen comparatif des quatre figures.

La face verticale d'arrière, correspondant à $x = a$, est un trapèze ABEF (*fig.* 4) dont le sommet inférieur A est à la distance $+a$ de chacun des trois axes. L'arête AF est verticale, l'arête EB horizontale; toutes deux sont égales à a et leurs directions sont rectangulaires entre elles. L'arête AB, inclinée à 45 degrés sur chacune des deux premières, est égale à $(b-a)\sqrt{2}$, et l'arête EF, parallèle à la précédente, est égale à $(b-2a)\sqrt{2}$. La face horizontale supérieure, correspondant à $z = b$, se trouve à la distance b du plan des xy; les angles EBC, CDE sont droits; EB est égal à $b-a$, CD à $\frac{1}{2}b\sqrt{2}$, BE à a, et DE à $(\frac{1}{2}b-a)\sqrt{2}$.

La face latérale d'avant AFDC, déterminée par $x = y$, est un quadrilatère dont les côtés $CD = \frac{1}{2}b\sqrt{2}$ et $AF = a$ sont rectangulaires entre eux. Le plus grand côté AC est égal à $(b-a)\sqrt{3}$. On a déjà la valeur des deux autres.

La face postérieure ABC, déterminée par $y = z$, est un triangle rectangle en B et dans lequel la hauteur AB est à la base $BC = b-a$ dans le rapport de $\sqrt{2}$ à 1.

Enfin, le triangle supérieur et de gauche EFD est rectangle en D; le côté DE est égal à $(\frac{1}{2}b-a)\sqrt{2}$, l'hypothénuse est $(b-2a)\sqrt{2}$, comme on l'a déjà dit, et l'autre côté de l'angle droit $\frac{1}{2}(b-2a)\sqrt{6}$.

Les faces sont donc rigoureusement définies de grandeur comme de

position. Les valeurs des coordonnées des six sommets et du sommet commun aux deux tétraèdres dont il est la différence sont consignées dans le petit Tableau suivant :

Désignation des sommets.	Valeurs des coordonnées. x.	y.	z.
A......	a	a	a
B......	a	b	b
C......	b	b	b
D......	$\frac{1}{2}b$	$\frac{1}{2}b$	b
E......	a	$b-a$	b
F......	a	a	$2a$
G......	a	a	b

D'un autre côté, il est manifeste que les deux pyramides triangulaires dont la différence constitue le pentaèdre ont, l'une pour base ABC (*fig.* 2) et pour hauteur $A'G' = b - a$ (*fig.* 1), l'autre, pour base ADE (*fig.* 2) et pour hauteur $F'G' = b - 2a$ (*fig.* 1). Le volume de la première est $\frac{1}{6}(b-a)^3$; le volume de la seconde est $\frac{1}{12}(b-2a)^3$. La différence ou le volume de la région de l'espace dont tous les points satisfont exclusivement à la condition voulue est

$$\frac{1}{12}\left[2(b-a)^3 - (b-2a)^3\right].$$

4. Les coordonnées du centre de gravité du pentaèdre se déduiront donc par de simples compositions de moments des coordonnées des centres de gravité et des volumes des deux pyramides dont ce pentaèdre est la différence

Or on sait que, dans le tétraèdre, les coordonnées du centre de gravité sont le quart de la somme des coordonnées correspondantes des quatre sommets.

Pour la grande pyramide, dont les sommets sont A, B, C et G, on a donc

$$\begin{aligned} X &= \tfrac{1}{4}(3a+b), \\ Y &= \tfrac{1}{2}(\ \ a+b), \\ Z &= \tfrac{1}{4}(\ \ a+3b), \end{aligned}$$

et pour la petite, dont les sommets sont D, E, F et G′, on a

$$\begin{aligned} X' &= \tfrac{1}{4}(3a + \tfrac{1}{2}b), \\ Y' &= \tfrac{1}{4}(\ a + \tfrac{3}{2}b), \\ Z' &= \tfrac{1}{4}(3b + 2a). \end{aligned}$$

En prenant la différence des moments successivement par rapport à chacun des plans coordonnés, on trouve d'abord

$$(A) \quad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{\frac{1}{4}(3a+b)(b-a)^3 - \frac{1}{16}(6a+b)(b-2a)^3}{[(b-a)^3 - \frac{1}{2}(b-2a)^3]}, \\ y &= \frac{\frac{1}{2}(a+b)(b-a)^3 - \frac{1}{8}(2a+3b)(b-2a)^3}{[(b-a)^3 - \frac{1}{2}(b-2a)^2]}, \\ z &= \frac{\frac{1}{4}(a+3b)(b-a)^3 - \frac{1}{8}(2a+3b)(b-2a)^3}{[(b-a)^3 - \frac{1}{2}(b-2a)^3]}. \end{aligned} \right.$$

Telles sont les valeurs moyennes du plus petit, du moyen et du plus grand côté des triangles en nombre infini que l'on peut supposer formés sans autre condition que d'être compris entre deux limites données a et b, ces côtés ayant été rangés par ordre de grandeur croissante et a étant plus petit que la moitié de b; car cette dernière hypothèse est implicitement admise dans la construction des *fig.* 1 à 4.

Si, au lieu de considérer les valeurs moyennes absolues des côtés, on cherche seulement les rapports de ces moyennes à la limite b, et que l'on pose

$$\alpha = 1 - \frac{a}{b} \quad \text{et} \quad \beta = 1 - \frac{2a}{b},$$

les rapports cherchés prennent la forme très-simple

$$\begin{aligned} \frac{x}{b} &= \frac{(\alpha^3 - \frac{1}{4}\beta^3) - \frac{3}{4}(\alpha^4 - \frac{1}{4}\beta^4)}{\alpha^3 - \frac{1}{2}\beta^3}, \\ \frac{y}{b} &= \frac{(\alpha^3 - \frac{1}{4}\beta^3) - \frac{2}{4}(\alpha^4 - \frac{1}{8}\beta^4)}{\alpha^3 - \frac{1}{2}\beta^3}, \\ \frac{z}{b} &= \frac{(\alpha^3 - \frac{1}{4}\beta^3) - \frac{1}{2}(\alpha^4 - \frac{1}{2}\beta^4)}{\alpha^3 - \frac{1}{2}\beta^3}. \end{aligned}$$

6. Le cas où l'on a $a > \frac{1}{2}b$ est beaucoup plus simple. Le solide qui

comprend la région de l'espace dont tous les points ont des coordonnées égales aux trois côtés d'un des triangles possibles se réduit alors à un tétraèdre ABCG (*fig.* 4) dont trois faces sont rectangles, et qui est représenté, tant en projections qu'en perspective, dans les quatre figures du cas précédent, dans lesquelles on ferait abstraction de la section EFD. Les coordonnées des quatre sommets sont données dans le tableau suivant :

Sommets du tétraèdre.	Coordonnées des sommets		
	x.	y.	z.
A	a	a	a
B	a	b	b
C	b	b	b
G	a	a	b

Il résulte de là que les coordonnées du centre de gravité de ce solide ont pour expressions

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{4}(3a + b), \\ y = \frac{1}{2}(a \quad + b), \\ z = \frac{1}{4}(a \quad + 3b), \end{array}\right\} \text{ et, pour } a = \frac{1}{2}b \quad \left\{\begin{array}{l} x = \frac{5}{8}b, \\ y = \frac{3}{4}b, \\ z = \frac{7}{8}b. \end{array}\right.$$

Ce sont précisément les mêmes valeurs que l'on obtient lorsque dans les formules (A) on fait $b = 2a$; nouvel exemple de l'existence de deux fonctions différentes pour exprimer une même loi mathématique, suivant le sens du signe d'inégalité qui lie l'une à l'autre deux données de la question, la loi de continuité se manifestant néanmoins par l'identité des résultats auxquels conduisent ces deux fonctions lorsque le signe d'égalité vient à établir le passage avant le renversement du signe d'inégalité.

7. Cette méthode purement géométrique pour la détermination des moyennes valeurs de trois éléments variables paraît susceptible d'autres applications. M. l'ingénieur Chemin [*] m'en a signalé une qui rend

[*] M. Chemin a pareillement exprimé l'idée que l'emploi des coordonnées polyé-

pour ainsi dire de pure intuition la solution du problème suivant, posé et résolu analytiquement par M. E. Lemoine dans le *Bulletin de la Société mathématique de France* (t. I, p. 39) :

Une tige (d'une longueur l) se brise en trois morceaux: quelle est la probabilité pour que, avec ces trois morceaux, on puisse former un triangle?

Considérons les trois fragments comme les coordonnées d'un n ème point de l'espace. Le lieu des points qui satisfont à la relation fondamentale

$$(1)\qquad x + y + z = l$$

est un triangle dont les sommets sont situés à la distance l de l'origine sur les trois axes des coordonnées.

Mais, pour que le triangle soit possible, il faut que l'on ait simultanément

$$(2)\qquad \begin{cases} x \leqq y + z, \\ y \leqq z + x, \\ z \leqq x + y. \end{cases}$$

Les trois plans déterminés par les équations de ce groupe, en ayant égard à l'équation (1), sont respectivement perpendiculaires à chacun des trois axes des coordonnées, à une distance de l'origine égale à $\frac{1}{2}l$. Leurs intersections avec le triangle déterminé par l'équation (1) déterminent un nouveau triangle qui joint deux à deux les milieux des côtés du premier et qui, par conséquent, n'a que le quart de sa superficie. Or, c'est seulement à l'intérieur de ce triangle central que se trouvent les points dont les coordonnées satisfont à l'ensemble des relations (1) et (2); la probabilité cherchée est donc $\frac{1}{4}$.

8. Au surplus, il existe une solution analytique non-seulement pour le problème énoncé au début de cet article, mais encore pour la question bien autrement compliquée de la valeur moyenne d'une fonction d'un

---

driques permettrait d'étendre l'usage de notre méthode géométrique à un nombre quelconque de variables.

nombre quelconque de variables. Cette solution, due à feu Philbert [*], va être exposée ici par la reproduction textuelle d'une note manuscrite rédigée, à ma prière, dans les premiers jours du mois d'avril 1871.

Note sur la détermination analytique de la valeur moyenne d'une fonction de plusieurs variables.

« Soit U une fonction quelconque de n quantités, u_1, $u_2 \ldots$, u_n qui varient, savoir :

u_1, de p_1 à q_1,	ces limites	étant des nombres,	
u_2, de p_2 à q_2,	»	fonctions de	u_1,
u_3, de p_3 à q_3,	»	»	u_1, u_2,
....	....	....	....
u_n, de p_n à q_n,	»	»	$u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$.

» Si l'on imagine qu'une seule des quantités u varie entre ses limites p et q par intervalles constants égaux à du, la somme des valeurs que prendra ainsi la fonction U, et que nous représenterons par $\sum_p^q \mathrm{U}$, sera égale à

$$\frac{\sum_p^q \mathrm{U}\,du}{du}.$$

» Or, pour chaque système de valeurs particulières attribuées à u_1, $u_2, \ldots, u_{n-1}$, u_n varie de p_n à q_n.

[*] Henri Philbert, ingénieur des Ponts et Chaussées, né à Bar-sur-Aube le 19 avril 1826, décédé à Vitry-le-François le 2 décembre 1876, était doué pour les Mathématiques d'une remarquable aptitude dont une modestie et une réserve excessives l'ont empêché de tirer, au profit de la Science, ce qu'on pouvait attendre de lui. Bon constructeur, versé dans la connaissance du droit administratif, esprit philosophique, caractère élevé et bienveillant, Philbert a été suivi dans la tombe par les regrets de tous ceux qui l'ont connu. Il a succombé à une maladie d'épuisement contractée à la suite des fatigues et des privations du siége de Paris. Je conserve précieusement le manuscrit qu'il m'avait remis le 5 avril 1871 et la correspondance échangée avec lui à ce sujet dès 1865.

» U acquerra donc aussi une somme de valeurs égale à

$$\frac{\sum_{p_n}^{q_n} \mathrm{U}\, du_n}{du_n}.$$

» Si dans ce système on conserve $u_1, u_2, \ldots, u_{n-2}$ constants, et que l'on fasse varier u_{n-1} entre ses limites, U acquerra une somme de valeurs égale à

$$\frac{\sum_{p_{n-1}}^{q_{n-1}} \left(\frac{\sum_{p_n}^{q_n} \mathrm{U}\, du_n}{du_n}\right) du_{n-1}}{du_{n-1}}$$

ou à

$$\frac{\sum_{p_{n-1}}^{q_{n-1}} du_{n-1} \sum_{p_n}^{q_n} \mathrm{U}\, du_n}{du_{n-1}\, du_n},$$

etc.....

» En continuant ainsi, on voit que la somme des valeurs qu'acquerra U, lorsque chaque quantité a varié entre ses limites p et q par intervalles constants égaux à du, sera

$$\frac{\sum_{p_1}^{q_1} du_1 \sum_{p_2}^{q_2} du_2 \ldots \sum_{p_n}^{q_n} \mathrm{U}\, du_n}{du_1\, du_2 \ldots du_n}.$$

» Le nombre des valeurs données à U s'obtiendra en faisant dans cette expression $\mathrm{U} = 1$. Il sera, par conséquent,

$$\frac{\sum_{p_1}^{q_1} du_1 \sum_{p_2}^{q_2} du_2 \ldots \sum_{p_n}^{q_n} du_n}{du_1\, du_2 \ldots du_n}.$$

» La moyenne des valeurs de U sera donc

$$\frac{\sum_{p_1}^{q_1} du_1 \sum_{p_2}^{q_2} du_2 \ldots \sum_{p_n}^{q_n} \mathrm{U}\, du_n}{\sum_{p_1}^{q_1} du_1 \sum_{p_2}^{q_2} du_2 \ldots \sum_{p_n}^{q_n} du_n}$$

et, lorsque les du deviendront infiniment petits, tendra vers l'expression

$$\frac{\int_{p_1}^{q_1} du_1 \int_{p_2}^{q_2} du_2 \dots \int_{p_n}^{q_n} \mathrm{U}\, du_n}{\int_{p_1}^{q_1} du_1 \int_{p_2}^{q_2} du_2 \dots \int_{p_n}^{q_n} du_n},$$

qu'on appelle *valeur moyenne de la fonction* U.

Si les variables sont simplement assujetties à ne devenir ni inférieures à un nombre donné ni supérieures à un autre nombre donné, on aura, en prenant ce dernier nombre pour unité, en appelant a le premier nombre et en supposant les variables rangées par ordre de grandeur croissante,

$$p_1 = a, \quad p_2 = u_1, \quad p_3 = u_2, \quad \dots, \quad p_n = u_{n-1},$$
$$q_1 = 1, \quad q_2 = 1, \quad q_3 = 1, \quad \dots, \quad q_n = 1.$$

» Si, alors, on pose

$$u_n = 1 - v_n,$$
$$u_{n-1} = 1 - v_{n-1},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$u_1 = 1 - v_1,$$

la première intégrale deviendra, en désignant par V la fonction U transformée et en posant $1 - a = \alpha$,

$$\int_0^{\alpha} dv_1 \int_0^{v_1} dv_2 \dots \int_0^{v_{n-1}} \mathrm{V}\, dv_n.$$

» En faisant $\mathrm{V} = 1$, on obtient pour valeur du dénominateur de l'expression considérée ci-dessus

$$\left(\int_0^{\alpha}\right)^n d\alpha^n \quad \text{ou} \quad \frac{\alpha^n}{1.2\dots n}.$$

» Lorsque U sera fonction seulement de $u_1, u_2, \dots, u_k$ (k étant $< n$), V sera fonction seulement de $v_1, v_2, \dots, v_k$, et la première intégrale

pourra s'écrire

$$\int_0^\alpha dv_1 \int_0^{v_1} dv_2 \ldots \int_0^{v_{k-1}} \mathrm{V}\, dv_k \int_0^{v_k} dv_{n+1} \ldots \int_0^{v_{n-1}} dv_n$$
$$= \int_0^\alpha dv_1 \int_0^{v_1} dv_2 \ldots \int^{v_{n-1}} \mathrm{V}\, dv_k \left(\int_0^{v_k}\right)^{n-k} dv^{n-k}$$
$$= \frac{1}{1.2\ldots(n-k)} \int_0^\alpha dv_1 \int_0^{v_1} dv_2 \ldots \int_0^{v_{k-1}} \mathrm{V} v_k^{n-k}\, dv_k.$$

» La valeur moyenne de U sera donc

$$\frac{\dfrac{1}{1.2\ldots(n-k)} \displaystyle\int_0^\alpha dv_1 \int_0^{v_1} dv_2 \ldots \int_0^{v_{k-1}} \mathrm{V} v_k^{n-k} dv_k}{\left(\dfrac{\alpha^n}{1.2\ldots n}\right)}.$$

» Faisons $\mathrm{U} = u_k$, d'où $\mathrm{V} = 1 - v_k$. Le numérateur devient

$$\frac{1}{1.2\ldots(n-k)} \left(\int_0^\alpha\right)^k (\alpha^{n-k} - \alpha^{n+1-k})\, d\alpha^k$$
$$= \frac{\alpha^n}{1.2\ldots n} - \frac{\alpha^{n+1}}{1.2\ldots(n-k)(n+2-k)\ldots(n+1)}$$
$$= \frac{\alpha^n}{1.2\ldots n}\left(1 - \frac{n+1-k}{n+1}\alpha\right).$$

» La valeur moyenne de u_k est donc

$$1 - \frac{n+1-k}{n+1}\alpha.$$

» Aucune des variables n'étant, par hypothèse, inférieure à a, la somme des $n-1$ premières ne peut jamais être inférieure à $(n-1)a$. Donc, si $a > \frac{1}{n-1}$, la somme des $n-1$ premières variables ne sera jamais inférieure à l'unité, et, par conséquent, la plus grande variable u_n, variant comme ci-dessus de u_{n-1} à 1, ne se trouvera jamais dépasser la somme de toutes les autres.

» Mais, lorsque $a < \frac{1}{n-1}$, la somme $u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}$ pourra, pour certaines valeurs des variables, être inférieure à l'unité, et u_n variant

de u_{n-1} à 1 acquerra certaines valeurs supérieures à $u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}$. Si l'on veut assujettir u_n à ne jamais dépasser cette somme, on devra adopter pour limite supérieure de u_n l'unité ou $u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}$, suivant que l'unité sera inférieure ou supérieure à la somme $u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}$, et modifier en conséquence les formules précédentes.

» Pour établir les nouvelles formules, nous nous donnerons la condition plus générale $u_{m+1} < u_1 + u_2 + \ldots + u_m$, m étant un nombre quelconque $< n$. Supposons, par suite, $a < \frac{1}{m+1}$; nous aurons à faire varier u_{m+1} de u_m à 1 ou à $S_m = u_1 + u_2 + \ldots + u_m$, suivant que l'unité sera $\lesseqgtr S_m$.

» La somme des valeurs de U sera représentée par

$$\frac{1}{du_{m+1}\,du_{m+2}\ldots du_n}\left(\sum{}' \int_{u_m}^{1} + \sum{}'' \int_{u_m}^{S_m}\right) du_{m+1} \int_{u_{m+1}}^{1} du_{m+2} \ldots \int_{u_{n-1}}^{1} U\,du_n,$$

Σ' désignant la sommation relative à tous les systèmes pour lesquels $1 < S_m$ et Σ'' la sommation relative à tous les systèmes pour lesquels $S_m < 1$.

» Or l'expression symbolique entre parenthèses peut s'écrire

$$\sum{}' \int_{u_m}^{1} + \sum{}'' \left(\int_{u_m}^{1} - \int_{S_m}^{1}\right) = \sum \int_{u_m}^{1} - \sum{}'' \int_{S_m}^{1},$$

en désignant par Σ la sommation relative à tous les systèmes possibles, sommation qui a été effectuée dans le problème précédent.

» Il reste donc à effectuer la sommation Σ'' (laquelle, considérée isolément, correspondrait à la recherche de la valeur moyenne de U pour le cas où, aucune des variables ne pouvant être inférieure à a ni supérieure à 1, on assujettirait en outre celle de rang $m + 1$ à ne pas être inférieure à la somme des m premières). A cet effet, nous transformerons d'abord l'intégrale placée sous le signe Σ'' en posant, comme dans le problème précédent,

$$\begin{aligned} u_n &= 1 - v_n, \\ u_{n-1} &= 1 - v_{n-1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_{m+1} &= 1 - v_{m+1}. \end{aligned}$$

L'intégrale devient ainsi

$$\int_0^{1-S_m} dv_{m+1} \int_0^{v_{m+1}} dv_{m+2} \cdots \int_0^{v_{n-1}} V\,dv_n$$

» Maintenant, pour obtenir Σ'', nous observerons que l'on a encore

$$p_m = u_{m-1}, \quad p_{m-1} = u_{m-2}, \quad \ldots, \quad p_2 = u_1, \quad p_1 = a,$$

les limites supérieures q se trouvant d'ailleurs déterminées par le système d'équations (A) ci-dessous, en face duquel nous écrirons le système d'équations complémentaires de transformation (B) :

$$(A)\left\{\begin{array}{r} u_1 + u_2 + \ldots + u_{m-1} + q_m = 1, \\ u_1 + u_2 + \ldots + 2q_{m-1} = 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_1 + (m-1)\,q_{m-2} = 1, \\ mq_1 = 1, \end{array}\right. \qquad \left.\begin{array}{r} u_1 + u_2 + \ldots + u_{m-1} + u_m = 1 - v_m \\ u_1 + u_2 + \ldots + 2u_{m-1} = 1 - v_{m-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_1 + (m-1)\,u_2 = 1 - v_2 \\ mu_1 = 1 - v_1 \end{array}\right\}(B)$$

» En posant $1 - ma = \beta$, on obtient pour

$$\sum{}'' \int_0^{1-S_m} dv_{m+1}$$

la forme

$$\frac{1}{du_1\,du_2\ldots du_m}\,\frac{1}{1.2\ldots m}\int_0^{\beta} dv_1 \int_0^{v_1} dv_2 \ldots \int_0^{v_m} dv_{m+1}$$

» Faisons $U = u_k$.

» Si $k > m$, on a simplement $V = 1 - v_k$, et le résultat de l'intégration se déduit de celui obtenu dans le problème précédent en remplaçant simplement α par β. C'est donc $\frac{\beta^n}{1.2\ldots n}\left(1 - \frac{n+1-k}{n+1}\beta\right)$. La valeur moyenne de u_k est, par conséquent, donnée par la formule très-simple

$$(u_k) = \frac{\frac{\alpha^n}{1.2\ldots n}\left(1 - \frac{n+1-k}{n+1}\alpha\right) - \frac{1}{1.2\ldots m}\,\frac{\beta^n}{1.2\ldots n}\left(1 - \frac{n+1-k}{n+1}\beta\right)}{\frac{\alpha^n}{1.2\ldots n} - \frac{1}{1.2\ldots m}\,\frac{\beta^n}{1.2\ldots n}}$$

$$= 1 - \frac{n+1-k}{n+1}\,\frac{\alpha^{n+1} - \frac{\beta^{n+1}}{1.2\ldots m}}{\alpha^n - \frac{\beta^n}{1.2\ldots}}$$

ou, en désignant par ρ le rapport $\frac{\beta}{\alpha}$ et par P_m le nombre de permutations de m lettres,

$$(u_k) = 1 - \frac{n+1-k}{n+1}\alpha\,\frac{1-\frac{\rho^{n+1}}{P_m}}{1-\frac{\rho^n}{P_m}}.$$

» Mais, si $k \overline{\gtrless} m$, u_k ou V se trouve à la fois fonction de $v_{k-1}, v_{k-2}, \ldots, v_2$ et v_1, et la formule se complique notablement.

» Faisons d'abord $k=1$, d'où $V = u_1 = \frac{1-v_1}{m}$.

L'intégrale

$$\int_0^\beta dv_1 \int_0^{v_1} dv_2 \ldots \int_0^{v_{n-1}} V\,dv_n$$

prend la valeur

$$\frac{1}{m}\left(\frac{\beta^n}{P^n} - \frac{\beta^{n+1}}{P_{n-1}(n+1)}\right) = \frac{1}{m}\left(\frac{\beta^n}{P_n} - \frac{n}{n+1}\,\frac{\beta^{n+1}}{P_n}\right).$$

» Il vient donc

$$(u_1) = \frac{\left(\frac{\alpha_n}{P_n} - \frac{n}{n_{+1}}\,\frac{\alpha^{n+1}}{P_n}\right) - \frac{1}{P_m}\,\frac{1}{m}\left(\frac{\beta^n}{P_n} - \frac{n}{n+1}\,\frac{\beta^{n+1}}{P_n}\right)}{\frac{\alpha^n}{P_n} - \frac{1}{P_m}\,\frac{\beta^n}{P_n}}$$

ou

$$(u_1) = \frac{\left(\alpha^n - \frac{1}{m}\,\frac{\beta^n}{P_m}\right) - \frac{n}{n+1}\left(\alpha^{n+1} - \frac{1}{m}\,\frac{\beta^{n+1}}{P_m}\right)}{\alpha^n - \frac{\beta^n}{P_m}}.$$

» On déduit de là facilement la valeur moyenne de u_2, et, en général, on déduira de la valeur moyenne de u_{k-1} celle de u_k (k étant $\overline{\gtrless} m$), car on a en général

$$(m-k+1)(u_k - u_{k-1}) = v_{k-1} - v_k,$$

d'où

$$u_k = u_{k-1} + \frac{v_{k-1} - v_k}{m-k+1}.$$

» Or, posons

$$\mathrm{H}_k = \int_0^{\beta} dv_1 \int_0^{v_1} dv_2 \ldots \int_0^{v_{n-1}} u_k\, dv_n.$$

» En substituant pour u_k l'expression ci-dessus, il viendra

$$\begin{aligned}\mathrm{H}_k &= \mathrm{H}_{k-1} + \frac{1}{m-k+1}\left(\frac{n-k+2}{\mathrm{P}_{n+1}}\beta^{n+1} - \frac{n-k+1}{\mathrm{P}_{n+1}}\beta^{n+1}\right)\\ &= \mathrm{H}_{k-1} + \frac{1}{m-k+1}\,\frac{\beta^{n+1}}{\mathrm{P}_{n+1}}.\end{aligned}$$

» La valeur moyenne de u_k sera donc

$$(u_k) = \frac{\frac{\alpha_n}{\mathrm{P}^n}\left(1 - \frac{n+1-k}{n+1}\alpha\right) - \frac{1}{\mathrm{P}_m}\left(\mathrm{H}_{k-1} + \frac{1}{m-k+1}\frac{\beta^{n+1}}{\mathrm{P}_{n+1}}\right)}{\frac{1}{\mathrm{P}_n}\left(\alpha^n - \frac{\beta^n}{\mathrm{P}_m}\right)}.$$

» Mais on a

$$(u_{k-1}) = \frac{\frac{\alpha_n}{\mathrm{P}_n}\left(1 - \frac{n+2-k}{n+1}\alpha\right) - \frac{1}{\mathrm{P}_m}\mathrm{H}_{k-1}}{\frac{1}{\mathrm{P}_n}\left(\alpha^n - \frac{\beta^n}{\mathrm{P}_m}\right)},$$

d'où

$$(u_k) - (u_{k-1}) = \frac{\frac{1}{\mathrm{P}_n}\frac{\alpha^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{\mathrm{P}_{n+1}}\frac{1}{m-k+1}\frac{\beta^{n+1}}{\mathrm{P}_m}}{\frac{1}{\mathrm{P}_n}\left(\alpha^n - \frac{\beta^n}{\mathrm{P}_m}\right)},$$

ou

$$(u_k) = (u_{k-1}) + \frac{1}{n+1}\,\frac{\alpha^{n+1} - \frac{1}{m+1-k}\frac{\beta^{n+1}}{\mathrm{P}_m}}{\alpha^n - \frac{\beta^n}{\mathrm{P}_m}},$$

d'où l'on déduit la formule générale

$$(u_k) = \frac{\left(\alpha^n - \frac{1}{m}\frac{\beta^n}{\mathrm{P}_m}\right) - \frac{1}{n+1}\left[(n-k+1)\,\alpha^{n+1} - \left(\frac{n}{m} - \mathrm{S}_{i=1}^{i=k-1}\frac{1}{m-i}\right)\frac{\beta^{n+1}}{\mathrm{P}_m}\right]}{\alpha^n - \frac{\beta^n}{\mathrm{P}_m}}.$$

» Pour en revenir au problème proposé, il faut faire $m = n - 1$ et

l'on obtient ainsi pour $k = n$ la formule

$$u_n = \frac{\left(\alpha^n - \frac{\beta^n}{P_{n-1}}\right) - \frac{1}{n+1}\left(\alpha^{n+1} - \frac{\beta^{n+1}}{n+1}\right)}{\alpha^n - \frac{\beta^n}{P_{n-1}}}$$

et, pour $k < n$, la formule

$$u_k = \frac{\left(\alpha^n - \frac{1}{n-1}\frac{\beta^n}{P_{n-1}}\right) - \frac{n-k+1}{n+1}\left(\alpha^{n+1} - \frac{\frac{n}{n-1} - \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-3} - \ldots - \frac{1}{n-k}}{n-k+1}\frac{\beta^{n+1}}{P_{n-1}}\right)}{\alpha^n - \frac{\beta^n}{P_{n-1}}}.$$

» Appliquons ces formules au cas de $n = 3$. On aura, en supposant $a \leqq \frac{1}{2}$,

$$u_1 = \frac{(\alpha^3 - \frac{1}{4}\beta^3) - \frac{3}{4}(\alpha^4 - \frac{1}{4}\beta^4)}{\alpha^3 - \frac{1}{2}\beta^3},$$

$$u_2 = \frac{(\alpha^3 - \frac{1}{4}\beta^3) - \frac{2}{4}(\alpha^4 - \frac{1}{8}\beta^4)}{\alpha^3 - \frac{1}{2}\beta^3}$$

et

$$u_3 = 1 - \frac{1}{4}\frac{\alpha^4 - \frac{1}{2}\beta^4}{\alpha^3 - \frac{1}{2}\beta^3},$$

formules dans lesquelles $\alpha = 1 - a$, $\beta = 1 - 2a$. »

9. Telle est l'application, au cas particulier que nous avons traité géométriquement, de cette belle et délicate analyse de Philbert. Ces trois valeurs de u_1, u_2 et u_3 sont précisément les mêmes que nous avons trouvées par des déductions purement géométriques pour $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{b}$ et $\frac{z}{c}$.

10. L'application des formules à des exemples et la comparaison des nombres qu'on en tire avec les résultats constatés présentent assez d'intérêt pour qu'on en fasse mention ici. Les trois réseaux successifs, à mailles décroissantes, dont on peut recouvrir le territoire français en joignant deux à deux les préfectures, les sous-préfectures et les chefs-lieux de canton étant tracés, et les termes extrêmes pour chacun de ces trois réseaux étant

$$a = \begin{cases} 17^{\text{km}},300, \\ 7,570, \\ 1,700, \end{cases} \qquad b = \begin{cases} 155^{\text{km}},700, \\ 129,700, \\ 29,600, \end{cases}$$

l'application des formules (A) (p. 112) et la comparaison des valeurs moyennes que devraient avoir les côtés dans ces trois triangulations successives, d'après ces formules, avec les valeurs effectivement déduites de mesurages directs, donnent les résultats suivants :

		Valeurs calculées.	Valeurs mesurées.
		km	km
Réseau préfectoral.	x	61,703	65,138
	y	98,242	91,987
	z	118,922	105,723
Réseau sous-préfectoral.	x	49,494	32,216
	y	81,355	44,959
	z	97,846	53,245
Réseau cantonal.	x	11,290	11,000
	y	18,565	14,885
	z	22,325	17,675

La tendance effective à l'équilatérie ressort bien de l'inspection seule de ce Tableau, puisque nous voyons, dans les valeurs moyennes mesurées des côtés des triangles d'un même réseau, des écarts beaucoup moindres que dans les valeurs calculées dans l'hypothèse où toutes les longueurs de ces côtés auraient été également possibles entre les limites extrêmes particulières à chaque réseau.

11. Mais la Géométrie fournit encore le moyen de mettre cette tendance en lumière par un procédé différent.

On peut convenir, en effet, de considérer comme *à peu près équilatéraux* les triangles dans lesquels le plus petit côté ne diffère du moyen et le plus grand du moyen que dans un rapport qui atteint au plus $\frac{m-n}{m}$, de chercher quelle serait la proportion relative dans le nombre total des triangles possibles si la possibilité était la même pour tous, et enfin de comparer la proportion calculée dans cette hypothèse avec la proportion fournie par l'observation.

Or, la région de l'espace dont tous les points ont pour coordonnées les côtés de triangles à peu près équilatéraux est déterminée, en vertu des considérations et de la définition précédentes :

1° Par les quatre relations (1), (1 *bis*), (2) et (2 *bis*) données plus haut;
2° Par les relations nouvelles

$$(4)\qquad y \leqq \frac{m}{m-n}x,$$

$$(5)\qquad z \leqq \frac{m}{m-n}y.$$

En ne conservant que le signe d'égalité, les six équations donnent autant de plans qui délimitent la région de l'espace dont il s'agit et sont les faces d'un hexaèdre, lequel est une pyramide quadrangulaire tronquée par un plan perpendiculaire à la base. Cette base et la section de troncature sont des trapèzes; toutes les autres faces sont des quadrilatères dans chacun desquels deux côtés sont perpendiculaires entre eux.

Les *fig.* 1, 2 et 3 (p. 109) représentent les projections de cette pyramide tronquée suivant les contours apparents ACHM, A'B'K'N', A''C''I''M''. Les trapèzes de la base et de la troncature sont CHIK (*fig.* 2) et A'L'M'N' (*fig.* 1) en grandeur naturelle.

Ce même hexaèdre tronqué ALMN, CHIK se voit en perspective sur la *fig.* 4.

On trouve facilement les valeurs des dimensions nécessaires à la mesure des deux pyramides dont l'hexaèdre est la différence.

Ainsi, d'abord, pour la première on a

$$\mathrm{CH} = \frac{n}{m}b, \quad \mathrm{IK} = \frac{(m-n)n}{m^2}b, \quad \mathrm{K'B'} = \mathrm{CH}.$$

Ce qui donne pour l'aire du trapèze CHIK

$$\frac{1}{2}\frac{(2m-n)n^2}{m^3}b^2,$$

et pour le volume

$$\frac{1}{6}\frac{(2m-n)n^2}{m^3}b^3.$$

Pour la seconde, on a

$$\mathrm{A'N'} = \frac{n}{m-n}a, \quad \mathrm{M'L'} = \frac{mn}{(m-n)^2}a, \quad \mathrm{AM} = \mathrm{A'N'}.$$

L'aire du trapèze A'L'M'N' sera donc

$$\frac{1}{2}\frac{(2m-n)n}{(m-n)^3}a^2,$$

et le volume de la pyramide

$$\frac{1}{6}\frac{(2m-n)n^2}{(m-n)^3}a^3.$$

La différence des deux volumes a pour expression

$$\tfrac{1}{6}n^2(2m-n)\left[\frac{b^3}{m^3}-\frac{a^3}{(m-n)^3}\right].$$

Le rapport de ce volume, proportionnel au nombre des triangles à peu près équilatéraux, au volume du pentaèdre qui comprend le nombre total des cas possibles, est

$$k=\frac{n^2(2m-n)[(m-n)^3b^3-m^3a^3]}{m^3(m-n)^3[(b-a)^3-4(\frac{1}{2}b-a)^3]}.$$

Telle serait la fraction vers laquelle convergerait le rapport du nombre des triangles à peu près équilatéraux au nombre total des triangles, si tous ces triangles étaient également possibles, s'il n'y avait aucune tendance à l'équilatérie, toujours dans l'hypothèse de $a<\frac{1}{2}b$.

12. Or, si l'on en vient aux résultats de l'expérience, on trouve que le nombre des triangles à peu près équilatéraux est beaucoup plus considérable que ne le comporte l'hypothèse d'égale possibilité.

En effet, supposons $\frac{n}{m}=20$, et considérons successivement, dans les trois réseaux que nous avons déjà examinés, d'abord les plus petites et les plus grandes distances, c'est-à-dire les valeurs de a et de b, ensuite les nombres effectifs de triangles dans lesquels le plus petit côté ne diffère pas du moyen, ni le moyen du plus grand de plus de 20

pour 100. Les résultats auxquels on parvient sont consignés dans le Tableau suivant :

INDICATION des réseaux.	VALEURS EXTRÊMES de		RAPPORT $\frac{b}{a}$ (approx.).	NOMBRE total des triangles relevés T.	NOMBRE des triangles à peu près équilatéraux t.	RAPPORT	
	a.	b.				observé $\frac{t}{T}$.	calculé k.
Préfectoral........	km 17,300	km 155,700	9	166	42	0,2530	0,1537
Sous-préfectoral...	7,570	129,700	17	721	180	0,2499	0,1468
Cantonal..........	1,700	29,600	17	816	224	0,2745	0,1468

La tendance à l'équilatérie se manifeste donc par ce fait que la proportion des triangles à peu près équilatéraux, dans chacun des trois réseaux, excède considérablement celle qui se produirait si tous les triangles étaient également possibles. L'excès est de 64 pour 100 dans le réseau préfectoral; de 70 pour 100 dans le réseau sous-préfectoral, de 87 pour 100 dans le réseau cantonal.

15. On trouve encore dans la Géométrie un auxiliaire utile pour résoudre d'une manière presque intuitive un genre de questions dont la solution analytique ne se présenterait peut-être pas avec le même degré de simplicité. Nous avons donné des exemples de ce genre (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 28 juin 1876), lorsque nous avons déterminé les probabilités respectives que les équations

$$z^2 + pz + q = 0,$$
$$z^3 + pz + q = 0$$

aient toutes leurs racines réelles, p et q étant compris entre des limites déterminées, et toutes les valeurs de ces coefficients étant considérées comme également possibles entre ces limites $\pm$ P, $\pm$ Q.

Il s'agit de comparer, dans le rectangle dont les sommets ont pour coordonnées $\pm$ P, $\pm$ Q, à la superficie 4PQ de ce rectangle, une aire

bornée, dans le cas du deuxième degré, par la parabole ordinaire

$$y = \tfrac{1}{4}x^2,$$

et, dans le cas du troisième degré, par la parabole semi-cubique

$$4x^3 + 27y^2 = 0.$$

La probabilité que les racines sont réelles, dans le deuxième degré, a pour expression

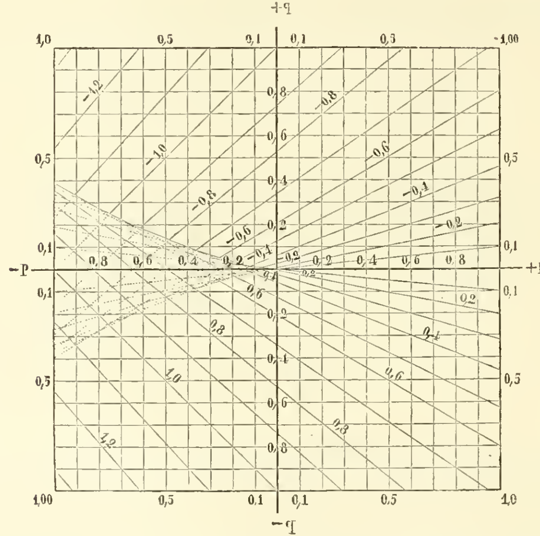
$$\frac{P^2 + 12Q}{24Q},$$

et, dans le troisième degré,

$$\frac{2}{45}\frac{\sqrt{3}\,P^{\frac{3}{2}}}{Q}.$$

Fig. 5.





Si l'on fait P = Q = 1, il y aura, dans l'équation du deuxième degré

13 à parier contre 11 que les deux racines sont réelles, et, dans l'équation du troisième degré, environ 923 à parier contre 77 qu'il n'y aura qu'une seule racine réelle, la probabilité de tomber sur le cas irréductible ayant pour expression $\frac{2\sqrt{3}}{45} = 0,07698$.

La *fig.* 5 met en évidence le résultat relatif à l'équation du troisième degré suivie de son second terme. Car, si l'on considère comme variables, dans cette équation, les coefficients p et q, et que l'on construise la série des droites représentées par $q = -zp - z^3$, lorsque l'on y fait varier z de dixième en dixième d'unité entre $+1$ et -1, on obtient précisément cette figure, et c'est l'aire de la parabole semi-cubique enveloppe de toutes ces droites qui, rapportée au rectangle 4PQ, fournit l'expression de la probabilité cherchée.

Ce mode d'évaluation est applicable à une équation d'un degré quelconque dans laquelle il y a deux coefficients variables, et le diagramme (*fig.* 6) donne, non pas la construction exacte, mais la configuration générale de la courbe enveloppe de toutes les droites comprises dans l'équation

$$y = zx + 0,15z^2 - 0,95z^3 + z^5.$$

Dans la partie centrale teintée $d_1 d_2 d_3 r_2$ il n'y a pas moins de cinq cours de droites qui s'entre-croisent; il y en a trois dans la partie du plan à gauche du contour $A r_1 d_1 A'$ et dans l'espace $d_2 d_3 r_3$; il n'y en a plus qu'un à droite du même contour. La probabilité d'avoir cinq, trois ou une seule racine réelle lorsque les coefficients x et y varient entre des limites connues, dans l'équation du cinquième degré

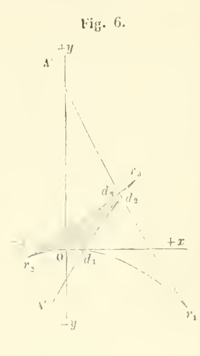
$$z^5 - 0,95z^3 + 0,15z^2 + xz - y = 0,$$

est donc déterminée par la comparaison d'aires planes dont les contours peuvent être construits et les superficies évaluées avec autant d'approximation qu'on le veut.

14. On a vu, dans ce qui précède, un lieu géométrique qui est un solide servir, par la détermination de son centre de gravité, à l'évaluation des moyennes valeurs des variables comprises entre deux limites

données et qui entrent dans la composition d'une fonction. Des considérations analogues ont fourni la valeur d'une probabilité cherchée, dans divers cas, par la comparaison de superficies planes. Or la détermination des centres de gravité, comme celle des aires, comporte implicitement, au moins, des calculs d'intégrales définies. D'un autre côté, les volumes et les superficies que l'on a rencontrés, dans cette étude, sont circonscrits par des surfaces ou par des lignes dont les équations peuvent être considérées comme les limites d'inégalités dont l'origine se trouve dans l'essence même des questions posées. Cette liaison entre le *calcul des conditions d'inégalité*, le *Calcul des probabilités* et le *Calcul intégral* a été signalée par l'illustre Fourier, en 1823, dans un Mémoire lu à l'Académie des Sciences dans les séances du 10 et du 17 novembre 1823, et dont il a donné le résumé dans la Partie mathématique de l'*Analyse des travaux de l'Académie* pendant la même année. Ce résumé inspire le vif regret qu'un Mémoire d'une aussi grande importance et d'un tel auteur n'ait pas été publié.

Fig. 6.



Il fut rendu compte des Communications de Fourier dans le *Bulletin des séances de la Société Philomathique* (mai et juin 1825) et dans la Partie Mathématique du *Bulletin Férussac* (juillet 1826).

Mais, dès la fin de 1811, M. Gergonne, dans le t. II des *Annales de Mathématiques*, avait signalé l'existence de cette nouvelle branche d'analyse, et il est revenu à plusieurs reprises sur le même objet (t. XIV et XVII du même recueil), pour lequel il paraît avoir le droit de revendiquer la priorité.

Les nouvelles applications que l'on vient d'indiquer semblent de nature à prouver que la matière signalée par Gergonne et mise en œuvre par un maître tel que Fourier est assez riche pour qu'on ne puisse pas la regarder comme épuisée.

Développements des trois fonctions $\mathrm{Al}(x)$, $\mathrm{Al}_1(x)$, $\mathrm{Al}_2(x)$ *suivant les puissances croissantes du module;*

PAR M. DÉSIRÉ ANDRE.

Introduction.

1. Nous avons fait connaître naguère [*] la forme générale des coefficients dans les développements, suivant les puissances croissantes de la *variable* x, des quatre fonctions de M. Weierstrass, représentées d'ordinaire par les notations $\mathrm{Al}(x)$, $\mathrm{Al}_1(x)$, $\mathrm{Al}_2(x)$, $\mathrm{Al}_3(x)$. Nous nous proposons actuellement de déterminer cette même forme générale des coefficients dans les développements, suivant les puissances croissantes du *module* k, des trois premières de ces fonctions.

2. Ce problème est tout à fait analogue à celui que nous avons résolu déjà [**] pour les fonctions elliptiques. Nous le résolvons par les mêmes procédés.

Nous partons des développements par rapport à la variable x que nous venons de rappeler (**1**).

Nous ordonnons chacun d'eux suivant les puissances de k, et nous déterminons avec soin les séries entières en x qui, dans les développements ainsi ordonnés, multiplient ces puissances.

Nous constatons que ces séries entières rentrent dans celles que nous avons jadis [***] étudiées, et nous en calculons les sommes respectives.

[*] *Journal de Mathématiques pures et appliquées.*

[**] *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure.*

[***] *Ibid.*

Enfin, à l'aide de ces sommes, nous donnons les formes générales des coefficients cherchés, et, par la considération des relations qui existent entre les fonctions de M. Weierstrass et les fonctions elliptiques, nous apportons à ces formes générales d'importantes simplifications.

3. Ces résultats ont été résumés par nous dans une Note que notre illustre maître, M. Hermite, a bien voulu présenter à l'Académie des Sciences [*]. Ils nous semblent entièrement nouveaux, sauf en ce qui regarde le développement de $\mathrm{Al}(x)$, dont la forme a été donnée, il y a plusieurs années déjà [**], par l'un de nos plus savants géomètres, le R. P. Joubert.

§ I. — *Développements suivant les puissances de x.*

4. Dans le Mémoire [***] que nous avons consacré aux développements des quatre fonctions de M. Weierstrass suivant les puissances croissantes de la variable x, nous avons posé

$$\mathrm{Al}(x) = \mathrm{P}_0 \quad - \mathrm{P}_1 \frac{x^2}{2!} + \mathrm{P}_2 \frac{x^4}{4!} - \mathrm{P}_3 \frac{x^6}{6!} + \cdots,$$

$$\mathrm{Al}_1(x) = \mathrm{Q}_0 \frac{x}{1!} - \mathrm{Q}_1 \frac{x^3}{3!} + \mathrm{Q}_2 \frac{x^5}{5!} - \mathrm{Q}_3 \frac{x^7}{7!} + \cdots,$$

$$\mathrm{Al}_2(x) = \mathrm{R}_0 \quad - \mathrm{R}_1 \frac{x^2}{2!} + \mathrm{R}_2 \frac{x^4}{4!} - \mathrm{R}_3 \frac{x^6}{6!} + \cdots,$$

et, en même temps,

$$\mathrm{P}_n = p_{n,0} + p_{n,1} k^2 + p_{n,2} k^4 + p_{n,3} k^6 + \ldots,$$

$$\mathrm{Q}_n = q_{n,0} + q_{n,1} k^2 + q_{n,2} k^4 + q_{n,3} k^6 + \ldots,$$

$$\mathrm{R}_n = r_{n,0} + r_{n,1} k^2 + r_{n,2} k^4 + r_{n,3} k^6 + \ldots.$$

5. Puis, regardant $p_{n,t}$, $q_{n,t}$, $r_{n,t}$ comme des fonctions de n seulement, nous sommes arrivés aux résultats suivants.

---

[*] *Comptes rendus*, séance du 17 juin 1878.

[**] *Ibid.*, séances des 29 mai et 5 juin 1876.

[***] *Journal de Mathématiques pures et appliquées.*

1° Les coefficients $p_{n,t}$, $q_{n,t}$, $r_{n,t}$, où n seul varie, constituent chacun le terme général d'une série récurrente proprement dite;

2° La série récurrente ayant le coefficient $p_{n,t}$ pour terme général admet l'équation génératrice

$$\prod_{1}^{\eta}{}_j [z - (2j)^2]^{2t-2j^2+1} = 0;$$

les séries qui ont pour termes généraux respectifs les coefficients $q_{n,t}$, $r_{n,t}$ admettent chacune l'équation génératrice

$$\prod_{0}^{\eta}{}_j [z - (2j+1)^2]^{2t-2j^2-2j+1} = 0,$$

η représentant, dans la première de ces équations, la partie entière de $\sqrt{t}$, et, dans la seconde, la partie entière de $\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{4t+1}\right)$.

3° Les formes générales des coefficients considérés sont données, pour $p_{n,t}$, par la formule

$$p_{n,t} = \sum_{1}^{\eta}{}_j \xi_j(n)[(2j)^2]^n,$$

pour $q_{n,t}$, $r_{n,t}$, par la formule

$$q_{n,t} = \sum_{0}^{\eta}{}_j \xi_j(n)[(2j+1)^2]^n,$$

η ayant, dans ces deux formules, les mêmes significations que dans les équations génératrices correspondantes qui précèdent, et $\xi_j(n)$ représentant un polynôme entier en n, du degré $2t - 2j^2$ dans la première formule et du degré $2t - 2j^2 - 2j$ dans la seconde.

6. A ces divers résultats nous joindrons les remarques bien connues [*] que voici :

Les quantités P_0, Q_0, R_0 sont égales chacune à l'unité.

Les polynômes P_n, Q_n, R_n, entiers par rapport à k, sont, Q_n du degré $2n$, P_n et R_n du degré $2n-2$.

---

[*] BRIOT et BOUQUET, *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 466, 468.

Quel que soit l'indice n, le coefficient $p_{n,0}$ est égal à zéro, et les coefficients $q_{n,0}$, $r_{n,0}$ sont égaux chacun à l'unité.

7. Ce sont ces résultats et ces remarques qui vont servir de points de départ aux présentes recherches.

§ II. — *Séries qui multiplient les puissances de k.*

8. Développées suivant les puissances croissantes du module k, les trois fonctions considérées affectent ces nouvelles formes

$$\begin{aligned} \mathrm{Al}(x) &= \mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1 k^2 + \mathrm{A}_2 k^4 + \mathrm{A}_3 k^6 + \ldots, \\ \mathrm{Al}_1(x) &= \mathrm{B}_0 + \mathrm{B}_1 k^2 + \mathrm{B}_2 k^4 + \mathrm{B}_3 k^6 + \ldots, \\ \mathrm{Al}_2(x) &= \mathrm{C}_0 + \mathrm{C}_1 k^2 + \mathrm{C}_2 k^4 + \mathrm{C}_3 k^6 + \ldots, \end{aligned}$$

dans lesquelles les coefficients A, B, C représentent des séries entières en x.

Pour bien déterminer ces séries entières, nous allons reprendre, l'un après l'autre, les développements (4) de nos fonctions suivant les puissances de la variable x et les ordonner suivant les puissances du module k.

9. Considérons d'abord le développement, par rapport à la variable x, de la fonction $\mathrm{Al}(x)$ et cherchons-y la série entière en x qui multiplie k^{2t}, c'est-à-dire qui constitue A_t.

Le premier des polynômes P qui contienne cette puissance de k est P_{t+1}, le second est P_{t+2}, le troisième $\mathrm{P}_{t+3}, \ldots$; et, dans ces différents polynômes, les coefficients qui multiplient k^{2t} sont respectivement $p_{t+1,t}$, $p_{t+2,t}$, $p_{t+3,t}$, ...

Mais, dans le développement de $\mathrm{Al}(x)$ par rapport à x, les polynômes P_{t+1}, P_{t+2}, P_{t+3}, ... multiplient respectivement les expressions

$$(-1)^{t+1}\frac{x^{2t+2}}{(2t+2)!}, \quad (-1)^{t+2}\frac{x^{2t+4}}{(2t+4)!}, \quad (-1)^{t+3}\frac{x^{2t+6}}{(2t+6)!}, \quad \ldots.$$

Donc nous avons

$$\mathrm{A}_t = (-1)^{t+1}\left[p_{t+1,t}\frac{x^{2t+2}}{(2t+2)!} - p_{t+2,t}\frac{x^{2t+4}}{(2t+4)!} + p_{t+3,t}\frac{x^{2t+6}}{(2t+6)!} - \ldots\right],$$

et il s'ensuit immédiatement que, si nous désignons par $\alpha(x)$ un polynôme convenablement choisi, entier en x, du degré $2t$ et ne contenant que des puissances paires de x, nous pouvons écrire

$$A_t = \alpha(x) + a_0 - a_1\frac{x^2}{2!} + a_2\frac{x^4}{4!} - a_3\frac{x^6}{6!} + \ldots,$$

le coefficient a_n étant de même forme (5) que le coefficient $p_{n,t}$ regardé comme fonction de n seul.

10. En raisonnant absolument de la même façon sur le développement, par rapport à la variable x, de la fonction $\mathrm{Al}_1(x)$, nous parvenons à la formule suivante :

$$B_t = \beta(x) + b_0\frac{x}{1!} - b_1\frac{x^3}{3!} + b_2\frac{x^5}{5!} - b_3\frac{x^7}{7!} + \ldots,$$

dans laquelle $\beta(x)$ représente un polynôme entier en x, du degré $2t-1$, ne contenant que des puissances impaires de x, et où le coefficient b_n est de même forme (5) que le coefficient $q_{n,t}$ regardé comme fonction de n seul.

11. Enfin, par les mêmes raisonnements encore, on parvient, pour la fonction $\mathrm{Al}_2(x)$, à la formule

$$C_t = \gamma(x) + c_0 - c_1\frac{x^2}{2!} - c_2\frac{x^4}{4!} + c_3\frac{x^6}{6!} + \ldots,$$

dans laquelle $\gamma(x)$ représente un polynôme entier en x, du degré $2t$, ne contenant que des puissances paires de x, et où c_n est de même forme (5) que $r_{n,t}$, regardé lui aussi comme fonction de n seulement.

§ III. — *Sommation des séries considérées.*

12. Les trois séries

$$a_0 \quad - a_1\frac{x^2}{2!} + a_2\frac{x^4}{4!} - a_3\frac{x^6}{6!} + \cdots,$$

$$b_0\frac{x}{1!} - b_1\frac{x^3}{3!} + b_2\frac{x^5}{5!} - b_3\frac{x^7}{7!} + \cdots;$$

$$c_0 \quad - c_1\frac{x^2}{2!} + c_2\frac{x^4}{4!} - c_3\frac{x^6}{6!} + \cdots,$$

qui figurent dans nos expressions (§ II) des quantités A_t, B_t, C_t, rentrent tout à fait, comme cas particuliers, dans les séries que nous avons récemment [*] étudiées et sommées. Nous pourrions donc obtenir leurs sommes en appliquant simplement les formules générales que nous avons trouvées alors. Vu la simplicité des séries actuelles, nous préférons déterminer ces sommes directement.

13. Prenons d'abord la première de nos trois séries. Le coefficient a_n, étant de la même forme (5) que le coefficient $p_{n,t}$, où n seul varie, constitue le terme général d'une série récurrente proprement dite. Si donc nous appelons s l'une quelconque des racines de l'équation génératrice de cette série et σ le degré de multiplicité de cette racine, nous avons, comme on le sait, la formule

$$a_n = \Sigma \xi_s(n) s^n,$$

dans laquelle $\xi_s(n)$ représente un polynôme entier en n du degré $\sigma - 1$ et où le signe Σ s'étend à toutes les racines de l'équation génératrice.

14. Le polynôme $\xi_s(n)$ étant ainsi du degré $\sigma - 1$, on voit facilement que l'expression soumise (**13**) au signe Σ, divisée par $(2n)!$, est donnée par l'égalité

$$\frac{\xi_s(n) s^n}{(2n)!} = f_0 \frac{(\sqrt{s})^{2n}}{(2n)!} + f_1 \frac{(\sqrt{s})^{2n-1}}{(2n-1)!} + f_2 \frac{(\sqrt{s})^{2n-2}}{(2n-2)!} + \ldots + f_{\sigma-1} \frac{(\sqrt{s})^{2n-\sigma+1}}{(2n-\sigma+1)!},$$

dans laquelle les coefficients $f_0, f_1, f_2, \ldots, f_{\sigma-1}$ sont indépendants du nombre entier variable n.

Par suite, dans le terme général de notre première série (**12**), la portion qui correspond à la racine s de l'équation génératrice peut s'écrire

$$(-1)^n \left[f_0 \frac{(x\sqrt{s})^{2n}}{(2n)!} + f_1 x \frac{(x\sqrt{s})^{2n-1}}{(2n-1)!} + f_2 x^2 \frac{(x\sqrt{s})^{2n-2}}{(2n-2)!} + \ldots + f_{\sigma-1} x^{\sigma-1} \frac{(x\sqrt{s})^{2n-\sigma+1}}{(2n-\sigma+1)!} \right],$$

et, pour obtenir la portion de la série totale qui correspond à cette

[*] *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure.*

même racine s, il nous suffit de sommer les résultats que fournit la présente expression, quand on y donne à n toutes les valeurs entières, depuis zéro jusqu'à $+\infty$.

15. On trouve, par cette sommation, un résultat de la forme

$$\varphi_s(x)\cos(x\sqrt{s}) + \psi_s(x)\sin(x\sqrt{s}),$$

le symbole $\varphi_s(x)$ représentant un polynôme entier en x ne contenant que des puissances paires de x, et le symbole $\psi_s(x)$ un polynôme entier en x ne contenant que des puissances impaires de x.

Il est visible, d'ailleurs, que ces deux polynômes $\varphi_s(x)$ et $\psi_s(x)$ ont pour degrés respectifs le plus grand nombre *pair* et le plus grand nombre *impair* non supérieurs à $\sigma - 1$.

Il résulte évidemment de tout cela que la première de nos séries (**12**) a pour somme l'expression

$$\Sigma\varphi_s(x)\cos(x\sqrt{s}) + \Sigma\psi_s(x)\sin(x\sqrt{s}),$$

dans laquelle les Σ s'étendent chacun à toutes les racines de l'équation génératrice.

16. Mais la racine quelconque s est (**5**) de la forme $(2j)^2$, le nombre j pouvant prendre toutes les valeurs $1, 2, 3, \ldots, \eta$, dont la dernière η est la partie entière de $\sqrt{t}$.

Mais, pour cette racine $(2j)^2$, la différence $\sigma - 1$ est (**5**) égale à $2t - 2j^2$.

Donc la somme de notre première série (**12**) peut s'écrire

$$\sum_{1}^{\eta}{}_j \sum_{0}^{t-j^2}{}_i\, g_{i,j}\, x^{2i}\cos 2jx + \sum_{1}^{\eta}{}_j \sum_{0}^{t-j^2-1} h_{i,j}\, x^{2i+1}\sin 2jx,$$

$g_{i,j}$ et $h_{i,j}$ étant des coefficients indépendants de x.

17. Par des raisonnements analogues à ceux qui précèdent, on verrait que la somme de notre seconde série (**12**) peut se mettre sous la forme

$$\Sigma\varphi_s(x)\sin(x\sqrt{s}) + \Sigma\psi_s(x)\cos(x\sqrt{s}),$$

dans laquelle les Σ s'étendent à toutes les racines de l'équation génératrice correspondante, et où $\varphi_s(x)$ et $\psi_s(x)$ représentent des polynômes entiers en x, n'en contenant, le premier que des puissances *paires*, le second que des puissances *impaires*, et ayant pour degrés respectifs le plus grand nombre *pair* et le plus grand nombre *impair* non supérieurs à $\sigma - 1$.

18. Mais, d'après les résultats indiqués précédemment (**5**), la racine quelconque s est, dans ce cas, de la forme $(2j+1)^2$, le nombre j pouvant prendre toutes les valeurs $0, 1, 2, \ldots, \eta$, dont la dernière η est la partie entière de $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{4t+1})$.

Mais, d'après les mêmes résultats (**5**), pour la racine $(2j+1)^2$, la différence $\sigma - 1$ est égale à $2t - 2j^2 - 2j$.

Donc la somme de notre seconde série (**12**) peut se mettre sous cette forme

$$\sum_{0}^{\eta}{}_j \sum_{0}^{t-j^2-j}{}_i g_{i,j}\, x^{2i} \sin(2j+1)x + \sum_{0}^{\eta}{}_j \sum_{0}^{t-j^2-j-1}{}_i h_{i,j}\, x^{2i+1} \cos(2j+1)x.$$

19. En opérant toujours de même, nous trouvons que la somme de notre troisième série (**12**) est de la forme

$$\Sigma \varphi_s(x) \cos(x\sqrt{s}) + \Sigma \psi_s(x) \sin(x\sqrt{s}),$$

dans laquelle les Σ présentent la même étendue et les symboles $\varphi_s(x)$ et $\psi_s(x)$ les mêmes significations que dans les formules analogues données précédemment (**15** et **17**).

20. Enfin, en nous reportant aux résultats (**5**) rappelés plusieurs fois déjà, nous voyons, dans ce cas de notre troisième série :

D'abord, que la racine quelconque s est de la forme $(2j+1)^2$, le nombre j pouvant prendre toutes les valeurs $0, 1, 2, \ldots, \eta$, dont la dernière η est la partie entière de $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{4t+1})$;

Ensuite que, pour cette racine $(2j+1)^2$, la différence $\sigma - 1$ est égale à $2t - 2j^2 - 2j$;

Et, par conséquent, que la somme de notre troisième série peut se

mettre sous la forme

$$\sum_{0}^{\eta}{}_j \sum_{0}^{t-j^2-j}{}_i g_{i,j}\, x^{2i} \cos(2j+1)x + \sum_{0}^{\eta}{}_j \sum_{0}^{t-j^2-j-1}{}_i h_{i,j}\, x^{2i+1} \sin(2j+1)x.$$

§ IV. — *Formes des coefficients* $\mathrm{A}_t, \mathrm{B}_t, \mathrm{C}_t$.

21. Si nous rapprochons les expressions des coefficients $\mathrm{A}_t, \mathrm{B}_t, \mathrm{C}_t$, données au § II, des expressions trouvées au § III, pour les sommes des séries (**12**) correspondantes, nous pouvons écrire immédiatement

$$\mathrm{A}_t = \alpha(x) + \sum_{1}^{\eta}{}_j \sum_{0}^{t-j^2}{}_i g_{i,j}\, x^{2i} \cos 2jx \quad + \sum_{1}^{\eta}{}_j \sum_{0}^{t-j^2-1}{}_i h_{i,j}\, x^{2i+1} \sin 2jx,$$

$$\mathrm{B}_t = \beta(x) + \sum_{0}^{\eta}{}_j \sum_{0}^{t-j^2-j}{}_i g_{i,j}\, x^{2i} \sin(2j+1)x + \sum_{0}^{\eta}{}_j \sum_{0}^{t-j^2-j-1}{}_i h_{i,j}\, x^{2i+1} \cos(2j+1)x,$$

$$\mathrm{C}_t = \gamma(x) + \sum_{0}^{\eta}{}_j \sum_{0}^{t-j^2-j}{}_i g_{i,j}\, x^{2i} \cos(2j+1)x + \sum_{0}^{\eta}{}_j \sum_{0}^{t-j^2-j-1}{}_i h_{i,j}\, x^{2i+1} \sin(2j+1)x,$$

et ces égalités résolvent le problème que nous nous sommes proposé, car elles donnent les formes des coefficients $\mathrm{A}_t, \mathrm{B}_t, \mathrm{C}_t$, et, par conséquent, celles des développements, suivant les puissances croissantes du module, des trois fonctions $\mathrm{Al}(x)$, $\mathrm{Al}_1(x)$, $\mathrm{Al}_2(x)$.

Seulement les présents résultats peuvent, par diverses considérations, être notablement simplifiés. C'est à ces simplifications que nous allons procéder.

22. Considérons en premier lieu la forme de A_t. On y peut supprimer le polynôme $\alpha(x)$, ou plutôt, ce qui est la même chose pour l'écriture, faire passer ce polynôme dans le deuxième terme du second membre.

Remplaçons, en effet, à la limite inférieure des Σ_j, l'unité par zéro. Ce changement n'altère en rien le troisième terme de notre second membre (**21**); mais il introduit au deuxième un polynôme entier en x, ne renfermant que des puissances paires de x et dont le degré est égal à $2t$, c'est-à-dire justement un polynôme capable (**9**) de remplacer $\alpha(x)$.

23. Dans les expressions (**21**) de B_t et de C_t, on peut de même supprimer $\beta(x)$ et $\gamma(x)$.

En effet, si l'on désigne par $\lambda(x)$ et $\mu(x)$ les deux premières fonctions elliptiques, on a les deux formules bien connues [*]

$$\mathrm{Al}_1(x) = \mathrm{Al}(x)\lambda(x), \quad \mathrm{Al}_2(x) = \mathrm{Al}(x)\mu(x).$$

Or, comme nous l'avons montré [**], chaque terme du développement, suivant les puissances du module k, soit de la fonction $\lambda(x)$, soit de la fonction $\mu(x)$, contient le sinus ou le cosinus d'un multiple *impair* de x. Donc il en est de même dans les développements, par rapport au module, des deux fonctions $\mathrm{Al}_1(x)$, $\mathrm{Al}_2(x)$. Donc, dans les coefficients B_t, C_t de ces derniers développements, les polynômes $\beta(x)$, $\gamma(x)$ sont identiquement nuls.

24. Nous pouvons donc écrire ces nouvelles égalités :

$$A_t = \sum_0^{\eta}{}_j \sum_0^{t-j^2}{}_i g_{i,j}\, x^{2i} \cos 2jx \qquad + \sum_0^{\eta}{}_j \sum_0^{t-j^2-1}{}_i h_{i,j}\, x^{2i+1} \sin 2jx,$$

$$B_t = \sum_0^{\eta}{}_j \sum_0^{t-j^2-j}{}_i g_{i,j}\, x^{2i} \sin(2j+1)x + \sum_0^{\eta}{}_j \sum_0^{t-j^2-j-1}{}_i h_{i,j}\, x^{2i+1} \cos(2j+1)x,$$

$$C_t = \sum_0^{\eta}{}_j \sum_0^{t-j^2-j}{}_i g_{i,j}\, x^{2i} \cos(2j+1)x + \sum_0^{\eta}{}_j \sum_0^{t-j^2-j-1}{}_i h_{i,j}\, x^{2i+1} \sin(2j+1)x.$$

Mais ce ne sont point encore là nos formules définitives, car les seconds membres de ces trois égalités peuvent, comme nous allons le voir, s'écrire d'une façon plus simple.

25. Rappelons-nous la signification (**5**) de la limite supérieure η des Σ_j dans l'expression de A_t. Ce nombre η est, dans cette expression, la partie entière de $\sqrt{t}$. Donc l'égalité qui donne A_t peut se mettre sous cette forme

$$A_t = \Sigma\, g_{i,j}\, x^{2i} \cos 2jx + \Sigma\, h_{i,j}\, x^{2i+1} \sin 2jx,$$

---

[*] Briot et Bouquet, *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 466.

[**] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, séance du 27 mai 1878.

les Σ s'étendant, le premier à tous les systèmes de valeurs des entiers non négatifs i et j qui satisfont à la fois aux deux relations

$$j \leqq \sqrt{t}, \quad i + j^2 \leqq t,$$

et le second à tous ceux qui satisfont à la fois aux deux relations

$$j \leqq \sqrt{t}, \quad i + j^2 \leqq t - 1.$$

On voit d'ailleurs immédiatement que, des deux relations correspondant au premier Σ, la seconde renferme la première, et qu'il en est de même pour les deux relations qui correspondent au second Σ.

26. Dans les expressions de B_t et de C_t, le nombre η est la partie entière de $\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{4t+1})$. Nous pouvons donc écrire

$$\mathrm{B}_t = \Sigma g_{i,j}\, x^{2i} \sin(2j+1)x + \Sigma h_{i,j}\, x^{2i+1} \cos(2j+1)x,$$
$$\mathrm{C}_t = \Sigma g_{i,j}\, x^{2i} \cos(2j+1)x + \Sigma h_{i,j}\, x^{2i+1} \sin(2j+1)x,$$

les Σ s'étendant, dans chacune de ces nouvelles formules, le premier à tous les systèmes de valeurs de i et j qui satisfont aux deux relations

$$j \leqq \tfrac{1}{2}(-1 + \sqrt{4t+1}), \quad i + j^2 + j \leqq t,$$

et le second à tous ceux qui satisfont aux deux relations

$$j \leqq \tfrac{1}{2}(-1 + \sqrt{4t+1}), \quad i + j^2 + j \leqq t - 1.$$

Et l'on peut voir encore sans peine que, des deux relations correspondant au premier Σ, la seconde comprend la première, et qu'il en est de même pour les deux relations qui correspondent au second Σ.

27. En définitive, A_t est donné par la formule

$$\mathrm{A}_t = \Sigma g_{i,j}\, x^{2i} \cos 2jx + \Sigma h_{i,j}\, x^{2i+1} \sin 2jx,$$

dans laquelle les Σ s'étendent, le premier à tous les systèmes de valeurs des entiers non négatifs i et j qui satisfont à la relation

$$i + j^2 \leqq t,$$

et le second à tous ceux qui satisfont à la relation

$$i + j^2 \leqq t - 1;$$

B_t et C_t sont donnés respectivement par les formules

$$B_t = \Sigma g_{i,j} x^{2i} \sin(2j+1)x + \Sigma h_{i,j} x^{2i-1} \cos(2j+1)x,$$
$$C_t = \Sigma g_{i,j} x^{2i} \cos(2j+1)x + \Sigma h_{i,j} x^{2i-1} \sin(2j+1)x,$$

dans chacune desquelles les Σ s'étendent, le premier à tous les systèmes de valeurs des entiers non négatifs i et j qui satisfont à la relation

$$i + j^2 + j \leqq t,$$

le second à tous ceux qui satisfont à la relation

$$i + j^2 + j \leqq t - 1.$$

28. Ces dernières formes des coefficients A_t, B_t, C_t sont fort analogues à celles que nous avons données [*] pour les coefficients des développements, par rapport au module, des fonctions elliptiques $\lambda(x)$, $\mu(x)$ et de leurs puissances. Ces deux sortes de formes diffèrent cependant entre elles, et d'une manière remarquable, par ce fait que les relations auxquelles satisfont, dans un même Σ, les entiers i et j ne renferment jamais j^2 lorsqu'il s'agit des fonctions elliptiques, et, au contraire, le renferment toujours lorsqu'il s'agit des fonctions de M. Weierstrass.

29. Quoi qu'il en soit de cette analogie et de cette différence, ce sont ces derniers résultats (**27**) que nous avons fait connaître dans notre Note à l'Académie des Sciences [**]. Comme nous l'avons dit dans notre Introduction, la formule qui donne A_t a été publiée pour la première fois par le R. P. Joubert [***]. Celles qui donnent B_t et C_t nous paraissent nouvelles.

---

[*] *Comptes rendus*, séance du 27 mai 1878.

[**] *Ibid.*, séance du 17 juin 1878.

[***] *Ibid.*, séances des 29 mai et 5 juin 1876.

Observations et orbites des satellites de Mars [*], *avec les éphémérides pour* 1879;

Par M. Asaph HALL,

Professeur de Mathématiques de la Marine des États-Unis.

Traduction et résumé par M. Paul GUIEYSSE,

Ingénieur hydrographe de la Marine, Répétiteur à l'École Polytechnique.

---

1. L'année 1877 a été signalée par un fait important dans les annales de l'Astronomie: la découverte des deux satellites de Mars, due au professeur Asaph Hall, de la Marine des États-Unis. La croyance à l'existence de ces satellites, fondée uniquement sur l'analogie avec les autre planètes, d'après les idées si chères aux philosophes du siècle dernier, avait été presque entièrement abandonnée par les astronomes modernes, surtout depuis les recherches infructueuses de William Herschel en 1783 [**]. Le seul astronome qui ait entrepris récemment des recherches sérieuses à ce sujet est l'ancien directeur de l'Observatoire de Copenhague, d'Arrest, mort en 1875. Les travaux mentionnés par Klein dans

---

[*] *Observations and orbits of the satellites of Mars, with data for ephemerides in* 1879; by Asaph Hall, professor of Mathematics, U. S. Navy (Rear-Admiral John Rodgers, U. S. Navy). Washington, Government printing office, 1878.

[**] Dans une Lettre à un de ses amis, à propos de la découverte des quatre satellites de Jupiter, datée de 1610, Kepler écrivait: « Je suis si loin de nier l'existence de quatre satellites à Jupiter, que j'attends impatiemment un télescope pour vous devancer, si c'est possible, dans la découverte de deux satellites à Mars, comme la proportion semble le comporter, de six ou huit à Saturne, et peut-être d'un à Mercure et à Vénus. »

son *Handbook of Astronomy* (vol. I, p. 140), furent l'objet d'un Mémoire important inséré dans les *Astronomische Nachrichten* (vol. LXIV, p. 74). Partant de la valeur de la masse de Mars et de sa distance à la Terre, d'Arrest calcula l'élongation d'un satellite qui ferait sa révolution autour de Mars dans un temps donné, et trouva que, pour une élongation de 70 minutes, la durée de la révolution du satellite dépasserait celle de Mars autour du Soleil, c'est-à-dire 687 jours, d'où il conclut que les recherches de satellites seraient inutiles au delà de cette distance; le carnet d'observations de d'Arrest fait penser que ces recherches, infructueuses d'ailleurs, eurent probablement lieu pendant l'opposition de Mars de 1862.

Malgré ces antécédents peu encourageants, Hall eut assez de confiance dans la puissance de la grande lunette de l'Observatoire de Washington munie d'un objectif Clarke de 26 pouces, pour ne pas laisser passer l'opposition de Mars de 1877 sans faire de soigneuses recherches, quoique pourtant la déclinaison sud de la planète fût contre lui et eût donné plus de chances de succès à un observateur qui se fût servi du grand télescope de Melbourne.

Les observations commencèrent au mois d'août; elles portèrent d'abord sur la région circumplanétaire, où Hall ne trouva que des étoiles fixes, puis sur la région tout proche de la planète et noyée pour ainsi dire dans l'éclat de ses rayons réfléchis. Pour cela, Hall amenait la planète juste en dehors du champ de l'oculaire et faisait ensuite lentement le tour du disque. Après plusieurs observations infructueuses, pendant lesquelles il reconnut plus tard que les satellites avaient été masqués par la planète, il aperçut enfin, le 11 août, un point brillant qui n'était autre que le satellite extérieur. Le mauvais temps interrompit les observations. Le 16, il revit le même point brillant; le 17, il en découvrit un autre, le satellite intérieur; les observations du 17 et du 18 mirent hors de doute l'existence de ces deux satellites, dont la découverte fut aussitôt officiellement annoncée par l'amiral Rodgers. Le satellite intérieur fut pourtant pendant quelques jours une énigme pour Hall, qui, le voyant dans la même nuit de différents côtés de la planète, fut tenté de croire à l'existence de deux ou trois satellites distincts, car il lui semblait peu probable qu'un satellite tournât autour de sa planète en moins de temps que celle-ci sur elle-même. C'est pourtant ce qui a lieu, et la

durée de la révolution de ce satellite est moindre que le tiers de celle de la rotation de Mars : cas unique dans notre système solaire.

Hall appela *Deimos* le satellite extérieur et *Phobos* le satellite intérieur, du nom des chevaux du char de Mars dans la Mythologie.

2. Dès que l'existence de ces satellites fut connue, de nombreux observateurs s'en occupèrent, surtout aux États-Unis. L'observation de Phobos est plus difficile que celle de Deimos, à cause de sa plus grande proximité de la planète ; l'éclat de ce satellite est pourtant plus vif que celui de Deimos, car on peut le suivre beaucoup plus près du disque de Mars que l'autre.

Les observations faites par Hall à Washington sont beaucoup plus complètes que celles des autres observateurs ; elles s'étendent du 11 août au 31 octobre pour Deimos et du 17 août au 15 octobre pour Phobos ; ce sont celles dont Hall s'est uniquement servi pour la détermination des orbites ; la difficulté d'observation des satellites, qui n'apparaissent jamais que comme de très-petits points noyés dans l'éclat de Mars, doit être cause que chaque observateur a une erreur constante, et la réunion de toutes les observations en une seule série ne peut être que difficile et imprudente.

La méthode employée par Hall consistait à diviser le disque apparent de Mars aussi également que possible par le fil du micromètre, puis à bissecter le satellite. Dans quelques très-belles nuits, Mars put être conservé dans le champ de vue, mais plus généralement Hall dut l'en faire sortir ; il observait alors en faisant glisser l'oculaire de droite à gauche, jusqu'à ce que la bissection restât juste. Il aurait peut-être mieux valu se servir d'un micromètre à deux fils, qui détacheraient sur la planète des segments égaux ; mais Hall ne voulut pas changer sa méthode une fois les observations commencées.

Il obtint ainsi l'angle de position et la distance ou les coordonnées polaires du satellite rapportées au centre de gravité du disque apparent de la planète ; il fallut donc introduire des corrections dues à la différence de réfraction et à la forme du disque.

Les corrections de la réfraction furent calculées par les formules données par Bessel (*Astronomische Untersuchungen*, vol. I, p. 165). Le centre de gravité se trouve sur la ligne menée à angle droit sur la ligne

des cornes et en son milieu. Si dans le triangle plan formé par le Soleil, Mars et la Terre, φ est l'angle à la planète, si en outre a est le rayon de la partie circulaire du disque et m la distance du centre de gravité du disque à la ligne des cornes, on a

$$m = \frac{8a}{3\pi} \sin \tfrac{1}{2} \varphi^2.$$

Si donc p et s représentent, suivant les notations adoptées généralement, l'angle de position observé et la distance du satellite, et θ l'angle de position de la ligne des cornes, les corrections de p et de s provenant de la forme du disque seront

$$\Delta s = m \sin(p - \theta),$$
$$\Delta p = \frac{m}{s} \cos(p - \theta).$$

Si maintenant α, δ, α' et δ' sont les ascensions droites et les déclinaisons du Soleil et de Mars, et d leur distance angulaire, on a, dans le triangle Pôle, Soleil, Mars,

$$\cos d = \sin \delta \sin \delta' + \cos \delta \cos \delta' \cos(\alpha' - \alpha)$$
$$\sin d \cos \theta = \cos \delta \sin(\alpha' - \alpha),$$
$$\sin d \sin \theta = \sin \delta \cos \delta' - \cos \delta \sin \delta' \cos(\alpha' - \alpha),$$

formules qui donneront θ, puis Δs et Δp. Hall réduisit alors toutes ces observations dans une Table dont voici la disposition :

Table I. — *Observations de Deimos.*

1877	Washington. T. M.	p.	$\Delta\varphi$.	Δp	Nombre des observ.	Valeur des observ	Washington. T. M.	s.	$\Delta\varphi$	Δs.	Nombre des observ	Valeur des observ
	h m	°	°	°			h m					
Août 11.	14.40,1	59,63	−0,01	+0,08	2	3	14.44,6	70″,56	+0″,03	+0″,31	1	3
» 16.	13. 7,5	71,93	0,00	+0,02	2	3	13.12,0	80,83	+0,02	+0,23	2	3
» 17.	16. 1,7	85,53	−0,02	−0,01	2	3	16.22,8	63,24	+0,04	+0,21	1 ½	3
» 18.	10.27,0	251,76	0,00	−0,03	3	3	10.19,0	82,98	+0,02	−0,21	4	3
» 18.	10.56,0	244,53	0,00	−0,04	1	3	11. 4,0	81,62	+0,03	−0,20	1	3

Et ainsi de suite pour chaque observation.

Cette Table contient, comme on le voit, le temps moyen de Washington, l'angle de position observé p, avec les corrections $\Delta\rho$ et Δp provenant de la réfraction et de la forme du disque, la distance observée s, avec des termes de correction semblables, et enfin le nombre et la valeur relative de chaque observation; ces valeurs sont représentées par des coefficients de 1 à 5, 1 correspondant à une observation médiocre et 5 à une parfaite.

Pour mettre les résultats obtenus sous une forme plus commode pour le calcul, Hall les rapporta au temps moyen de Greenwich, le *Nautical Almanac* anglais contenant des données pour la réduction des observations des satellites et l'estimation de leurs orbites sous une forme plus commode que les *Éphémérides américaines*. Voici la portion de cette Table correspondant à celle de la Table I :

TABLE II. — *Observations de Deimos.*

1877. Greenwich. T. M.	p.	Valeur relative.	Δp.	$\Delta p''$.	Greenwich. T. M.	s.	Valeur relative	Δs
Août 11,8288	59°,70	0,50	+0°,27	+0″,34	11,8260	70″,90	0,50	+0″,25
» 16,7586	71,95	0,50	−0,25	−0,36	16,7617	81,08	1,00	+1,02
» 17,8796	85,50	0,50	+2,93	+3,18	17,8943	63,49	0,75	+2,17
» 18,6472	251,73	0,75	+0,50	+0,72	18,6416	82,79	2,00	−0,31
» 18,6673	244,41	0,25	+5,83	+8,45	18,6728	81,45	0,50	+1,53

Cette Table contient les temps moyens de Greenwich en jours et fractions décimales de jour, les angles de position et les distances corrigées, puis des différences obtenues en retranchant les valeurs de ces éléments de celles qui seront calculées plus loin d'après les éléments circulaires approchés ; les différences Δp ont été réduites en arcs en multipliant par le facteur $\frac{s}{57,3}$. La Table contient aussi des coefficients des valeurs relatives des observations, calculés de la manière suivante, pour donner la même importance aux équations de condition provenant des mesures d'angles et de distances: pour une observation cotée 3 dans la Table I, on suppose que deux mesures de double distance

donnent une observation cotée 1, et qu'il en faut quatre d'angles de position pour avoir le même coefficient ; si alors ν est le nombre des comparaisons et μ le coefficient de la Table I, le coefficient de valeur relative pour la Table II est $\frac{\nu\mu}{6}$ pour les angles et $\frac{\nu\mu}{12}$ pour les distances.

5. Les méthodes données par Gauss dans son Ouvrage *Theoria motus* sont théoriquement suffisantes pour la détermination de l'orbite d'un satellite; mais, dans le cas présent, une petite erreur d'observation peut assez vicier le résultat pour ne rien donner même d'approximatif. Il est préférable de supposer l'orbite circulaire, d'en déterminer les nœuds et l'inclinaison, ce qui fixe la position de l'orbite plan, puis de corriger les éléments circulaires obtenus par la comparaison avec les observations, soit par des méthodes graphiques, ou, dans le cas d'une faible excentricité, par des équations de condition.

Si nous supposons l'orbite circulaire, le satellite paraîtra se mouvoir sur une ellipse, projection du cercle sur le plan perpendiculaire à la droite qui joint les centres de la Terre et de Mars, droite dont la position est connue à un moment quelconque.

a et b étant les axes de cette ellipse, l'inclinaison θ de l'orbite circulaire sur l'orbite apparente sera donnée par

$$\sin\theta = \frac{b}{a}\cdot$$

Si maintenant J représente l'inclinaison du plan de l'orbite sur celui de l'équateur, N l'ascension droite du nœud ascendant sur l'équateur, π l'angle observé de la ligne des apsides dans l'ellipse apparente, et α et δ l'ascension droite et la déclinaison de la planète, le triangle ayant pour sommets les pôles de l'équateur et de l'orbite du satellite et la planète a pour côtés J, $90^\circ - \delta$ et $90^\circ - \theta$, et pour angles opposés au premier et au dernier côté $\pi - 90^\circ$ et $\mathrm{N} - \alpha - 90^\circ$, d'où les relations

$$\begin{aligned}\sin\mathrm{J}\cos(\mathrm{N}-\alpha) &= \cos\theta\cos\pi,\\ \sin\mathrm{J}\sin(\mathrm{N}-\alpha) &= \sin\theta\cos\delta - \cos\theta\sin\delta\sin\pi,\\ \cos\mathrm{J} &= \sin\theta\sin\delta + \cos\theta\cos\delta\sin\pi.\end{aligned}$$

Les valeurs de θ et π, obtenues par une projection graphique des observations faites vers le moment de l'opposition et rapportées à l'unité

de distance, sont

$$\vartheta = 19^\circ 20' \quad \text{et} \quad \pi = 71^\circ 30';$$

avec les valeurs de α et δ pour le 28 août 1877, les formules précédentes donnent

$$J = 35^\circ 49' \quad \text{et} \quad N = 48^\circ 36',$$

de sorte que, le 28 août 1877, les éléments circulaires approchés des satellites de Mars étaient les suivants :

	Deimos.	Phobos.
Époque......	1877, août 21,7500, Greenwich T. M.	août 26,8192.
Période......	1^j,2625000 jour solaire moyen.	0^j,3189436.
$\log\mu$..........	2,4550711.	3,0525886.
a..........	32″,50 à l'unité de distance.	13″,00.
J..........	35°49′.	35°49′.
N..........	48°36′.	48°36′.
u..........	13°36′.	30°00′.

L'angle u est la distance angulaire du satellite au nœud à l'époque considérée ou l'angle correspondant à l'argument de la latitude, de sorte que

$$u = v + \pi - N = v + \omega,$$

v étant l'anomalie vraie et π la longitude du périhélie ; les différences données dans la Table II ont été trouvées en comparant ces éléments avec les observations.

Pour faciliter le calcul de la position d'un satellite, Bessel, dans son Mémoire sur l'orbite de Titan (*Astronom. Nachrichten*, vol. IX, p. 8), introduit six angles auxiliaires analogues à ceux employés par Gauss dans sa détermination de la position d'une planète (*Th. mot.*, art. 53). Ainsi, si l'on pose

$$\begin{aligned}
\sin f \cos F &= \cos(\alpha - N)\cos J,\\
\sin f \sin F &= -\sin(\alpha - N),\\
\cos f &= -\cos(\alpha - N)\sin J,\\
\sin g \cos G &= \cos\delta \sin J - \sin\delta \cos J \sin(\alpha - N),\\
\sin g \sin G &= -\sin\delta \cos(\alpha - N),\\
\cos g &= \cos\delta \cos J + \sin\delta \sin J \sin(\alpha - N),\\
\sin h \cos H &= \sin\delta \sin J + \cos\delta \cos J \sin(\alpha - N),\\
\sin h \sin H &= \cos\delta \cos(\alpha - N),\\
\cos h &= \sin\delta \cos J - \cos\delta \sin J \sin(\alpha - N),
\end{aligned}$$

on aura

$$x = \frac{a}{\rho} \sin f \sin(F + u),$$

$$y = \frac{a}{\rho} \sin g \sin(G + u),$$

$$z = \frac{a}{\rho} \sin h \sin(H + u),$$

ρ étant la distance de Mars à la Terre, et finalement

$$s \sin p = \frac{x}{1+z}, \quad s \cos p = \frac{y}{1+z};$$

x, y, z sont les distances à trois plans rectangulaires passant par le centre de la planète, dont l'un coïncide avec le plan de l'orbite du satellite, et dont z est la distance correspondante.

La quantité z est généralement assez petite devant l'unité pour pouvoir être négligée dans les équations différentielles, et son influence sur la valeur de la distance calculée peut être d'ailleurs aisément appréciée. Dans le cas des satellites de Mars, la variation de grandeur de s ne dépasse jamais $\pm 0'',05$, et l'influence finale de z sur la moyenne distance n'est pas sensible; mais, comme elle peut amener une légère modification de l'excentricité, il faut en tenir compte.

Le Mémoire de Hall contient une Table qui donne de quatre en quatre jours, du 10 août au 2 novembre 1877, les valeurs de $\log \sin f$, $\log \sin g$, $\log \sin h$, F, G et H à midi moyen de Greenwich.

4. Les équations différentielles, étant indépendantes de z, peuvent se déduire des valeurs de x et y:

$$s \sin p = x = \frac{a}{\rho} [\sin u \cos(\alpha - N) \cos J - \cos u \sin(\alpha - N)],$$

$$s \cos p = y = \frac{a}{\rho} \{\sin u [\cos\delta \sin J - \sin\delta \cos J \sin(\alpha - N)] - \cos u \sin\delta \cos(\alpha - N)\},$$

d'où, en différentiant et résolvant par rapport à ds et dp,

$$ds = \sin p\, dx + \cos p\, dy,$$
$$s\, dp = \cos p\, dx - \sin p\, dy.$$

L'équation polaire de la trajectoire est

$$r = a[1 - e\cos(u - \omega)] = a(1 - e\cos\omega\cos u - e\sin\omega\sin u),$$

en négligeant les puissances de e supérieures à la première, puisque les différences données dans la Table II entre les éléments circulaires et les observations sont très-faibles.

Posant $\xi = ae\cos\omega$, $\eta = ae\sin\omega$, il vient

$$r = a - \cos u.\xi - \sin u.\eta$$

et

$$dr = da - \cos u.\xi - \sin u.\eta.$$

Puis l'équation du centre donne

$$u = u_0 + 2ae\sin(u - \omega),$$

d'où

$$du = du_0 + 2\sin u.\xi - 2\cos u.\eta$$

Comme il n'existe encore aucune observation permettant de déterminer le mouvement diurne avec exactitude, il faut ajouter à du un terme de la forme $t\Delta\mu$, l'époque de t étant le 28 août à midi et l'unité de temps étant de dix jours moyens. Le calcul des coefficients différentiels de dx et dy, par rapport aux diverses quantités dont ils dépendent, et leur introduction dans les expressions de ds et sdp donnent les équations différentielles nécessaires pour la correction des éléments; elles sont de la forme

$$ds = \text{P}\Delta\text{N} + \text{Q}\Delta\text{J} + \text{R}\Delta u + \text{S}\Delta\mu + \text{T}\xi + \text{U}\eta + \text{V}\Delta a,$$
$$sdp = \text{P}'\Delta\text{N} + \text{Q}'\Delta\text{J} + \text{R}'\Delta u + \text{S}'\Delta\mu + \text{T}'\xi + \text{U}'\eta.$$

Introduisant les quantités auxiliaires

$$c\sin\text{C} = \sin p, \qquad b\sin\text{B} = \cos p,$$
$$c\cos\text{C} = \cos p\sin\delta, \qquad b\cos\text{B} = \sin p\cos\delta,$$

et posant $k = \frac{a}{\rho}$, on a, en omettant l'indice de u et remplaçant par les

arcs f et g les sinus correspondants,

$$
\begin{aligned}
P &= k[c\sin u\cos J\cos(\alpha - N - C) - c\cos u\sin(\alpha - N - C)],\\
Q &= k\sin u\sin J[\cos\delta\cos p\cot J + c\sin(\alpha - N - C)],\\
R &= k[f\cos(F + u)\sin p + g\cos(G + u)\cos p],\\
S &= Rt,\\
T &= 2R\sin u - \frac{s}{a}\cos u,\\
U &= -2R\cos u + \frac{s}{a}\sin u,\\
V &= \frac{s}{a},\\
P' &= k[-b\sin u\cos J\cos(\alpha - N + B) + b\cos u\sin(\alpha - N + B)],\\
Q' &= -k\sin u\sin J[\cos\delta\sin p\cot J + b\sin(\alpha - N + B)],\\
R' &= k[f\cos(F + u)\cos p - g\cos(G + u)\sin p],\\
S' &= R't,\\
T' &= 2R'\sin u,\\
U' &= -2R'\cos u.
\end{aligned}
$$

Pour le calcul, le plus simple est de supposer $a = 1$, ce qui exige la multiplication des résultats par le facteur $\frac{57,3}{a}$ pour les transformer en degrés.

Voici les portions des Tables calculées par Hall correspondant à celles données précédemment ; elles donnent les logarithmes des coefficients différentiels. La lettre n après un logarithme indique que le nombre correspondant est négatif ; la dernière colonne donne les différences obtenues en substituant les valeurs finales de ΔN, ΔJ, ... dans les équations de condition.

TABLE III. — *Deimos*. Équations en s.

Dates. Août 1877.	Δs.	ΔN.	ΔJ.	Δu.	$\Delta\mu$.	ξ.	η.	Δa.	Différence.
11	9,398	9,984 n	9,580	0,022 n	0,232	0,420 n	9,873 n	0,340	$-1'',45$
16	0,009	8,994	8,248 n	9,016	9,065 n	0,313 n	0,167 n	0,402	+0,15
17	0,337	0,193	8,980	0,159	0,165 n	0,371 n	0,411 n	0,294	+2,11
18	9,491 n	9,336	8,553 n	9,347	9,315 n	0,309	0,200	0,405	−0,04
18	9,322 n	9,672 n	9,097	9,686 n	9,654	0,387	0,052	0,399	−0,47

TABLE IV. — *Deimos*. Équations en p.

Dates. Août 1877.	$s\,\Delta p$.]	ΔN.	ΔJ.	Δu.	$\Delta\mu$.	ξ.	η.	Différence.
11	9,531	9,153 n	0,307 n	9,964 n	0,174	0,156 n	9,922	$-0'',31$
16	9,556 n	9,711	0,090 n	9,915 n	9,974	9,938 n	0,159	−0,95
17	0,502	9,661	9,506	0,035 n	0,044	9,482	0,331	+2,41
18	9,857	9,741	0,053 n	9,930 n	9,898	9,902	0,177 n	−0,11
18	9,672	9,437	0,237	9,937 n	9,905	0,095	0,080 n	−0,16

5. Les coefficients des équations de condition ayant été calculés d'après les formules ci-dessus, Hall résolut ces équations par la méthode des moindres carrés, après les avoir multipliées par la racine carrée du coefficient de leur valeur relative. Les sept inconnues, calculées au moyen de quatre-vingt-dix-huit équations pour Deimos et de soixante-dix-neuf pour Phobos, ont les valeurs suivantes :

Deimos.	*Phobos.*
$\Delta N = -0^\circ.30',3 \pm 3',60,$	$\Delta N = -1^\circ.22',8 \pm 16',66,$
$\Delta J = -0.10,3 \pm 2,83,$	$\Delta J = +0.58,1 \pm 14,22,$
$\Delta u = +1.43,5 \pm 6,40,$	$\Delta u = +2.32,2 \pm 17,72,$
$\Delta\mu = +0\ \ 9,6 \pm 1,95,$	$\Delta\mu = +0.40,6 \pm 8,81,$
$\xi = +0,14041 \pm 0,01377,$	$\xi = +0,2912 \pm 0,0167,$
$\eta = +0,12160 \pm 0,01825,$	$\eta = +0,2964 \pm 0,0198,$
$\Delta a = -0,1459 \pm 0,0118,$	$\Delta a = -0,0469 \pm 0,0142.$

Les éléments des satellites, corrigés d'après ces termes de correction, sont les suivants :

	Deimos.	*Phobos.*
Époque.	1877, août 28,0, Greenwich T. M.	Août 28,0.
Période.	$1^j,262429 = 30^h 17^m 55^s,86 \pm 0^s,985$.	$0^j,3189244 = 7^h 39^m 15^s,07 \pm 1^s,123$.
$\log \mu$ ...	2,4550955.	3,0526147.
a......	$32'',3541 \pm 0'',0118$.	$12'',9531 \pm 0'',0142$.
J......	$35°38',7$.	$36°47',1$.
N......	$48° 5',7$.	$47°13',2$.
ω......	$40°53',6 \pm 5°4',98$.	$45°30',4 \pm 2°11',16$.
e......	$0,005741 \pm 0,0004898$.	$0,032079 \pm 0,001407$.
u......	$357°30',5$.	$285°20',2$.

Pour Deimos, la somme des carrés des différences étant 29,07 et le nombre des observations de valeur égale à 1 étant $93\frac{2}{3}$, l'erreur probable d'une observation isolée est $\pm 0'',391$; elle est, pour Phobos, de $\pm 0'',412$: résultats bien satisfaisants, quand on songe aux difficultés des observations. Le disque apparent de Mars pendant l'opposition de 1877, qu'il fallait bissecter avec le fil du micromètre, était de 25″.

On voit que les plans des orbites des satellites ont une très-faible inclinaison sur l'équateur de Mars. Les éléments des orbites sont déterminés assez rigoureusement, sauf la durée de la révolution, qui ne le sera complétement qu'à la prochaine opposition. Pour Deimos, l'excentricité étant très-faible, la position de la ligne des apsides est naturellement incertaine; les éléments circulaires sont assez satisfaisants pour pouvoir servir aux observations. Pour Phobos, l'excentricité a une réelle valeur, qui ne peut être attribuée à des erreurs systématiques d'observation.

Ces données permettent maintenant de calculer la masse de Mars rapportée à celle du Soleil.

D'après Deimos, elle serait $\dfrac{1}{3095313 \pm 3485}$;

D'après Phobos, » $\dfrac{1}{3078456 \pm 10104}$.

Ces deux résultats concordent si bien dans les limites de leurs er-

reurs probables, que Hall a pris pour la valeur de cette masse, d'après ses observations de Washington, la moyenne de ces deux valeurs, en tenant compte de leurs justesses relatives :

$$\text{Masse de Mars} = \frac{1}{3093500 \pm 3295}.$$

Ces résultats obtenus, Hall les compara avec ceux qu'il put tirer des observations faites aux Observatoires de Cambridge et Glascow aux États-Unis et de Pulkova en Europe. Quelques astronomes anglais et français (MM. Henry, à Paris) aperçurent bien les satellites, tout au moins Deimos, mais leurs observations ne furent pas assez suivies pour en tirer de bons éléments de calcul; et encore Hall, faisant surtout cette comparaison pour voir s'il n'y avait pas dans sa manière de procéder une erreur systématique, conserva-t-il les valeurs de la durée de la révolution et de la position des orbites fournies par ses observations de Washington, qui embrassaient un bien plus grand laps de temps. Il eut seulement à calculer à nouveau les valeurs de f, F, g, G, ce qui lui donna par comparaison avec les observations une valeur de Δs, d'où Δa se déduisit par la relation $\Delta a = -\frac{da}{ds}\Delta s = -\frac{a}{s}\Delta s$.

Les observations faites à Cambridge (États-Unis) par M. Léonard Waldo, avec un objectif de 15 pouces, se trouvent dans les *Astronomische Nachrichten*, n° 2190; elles vont du 28 août au 5 octobre 1877 pour Deimos et du 4 au 23 septembre pour Phobos. Elles ont fourni pour les valeurs du grand axe de l'orbite et de la masse de Mars :

$$\text{Deimos}\ldots\ldots\quad a = 32'',6089 \pm 0'',0454,\quad m = \frac{1}{3023319},$$

$$\text{Phobos}\ldots\ldots\quad a = 13'',0080 \pm 0'',0266,\quad m = \frac{1}{3039643}.$$

Les observations faites à Glascow (Missouri, États-Unis) par M. Henry S. Pritchett, avec un objectif Clarke de $12\frac{1}{4}$ pouces, s'étendent du 28 août au 28 septembre pour Deimos et du 7 au 23 septembre pour Phobos; elles sont publiées dans les *Astronomische Nachrichten*, n° 2172.

Elles fournissent les résultats suivants :

Deimos...... $a = 32'',6052 \pm 0'',1008$, masse de Mars $= \frac{1}{3024348}$,

Phobos...... $a = 12'',5304 \pm 0'',0321$, masse de Mars $= \frac{1}{3400630}$.

Enfin, les quelques observations de Deimos faites à Pulkova en septembre, par M. Wagner, avec une lunette de 15 pouces, donnent :

Deimos...... $a = 32'',176 \pm 0'',121$, masse de Mars $= \frac{1}{3146996}$.

Hall regrette le peu d'observations des satellites faites en Europe, surtout de Phobos, qui n'aurait été aperçu qu'à Greenwich et à Oxford; il l'attribue en partie aux difficultés provenant des latitudes trop septentrionales des observatoires européens, en partie à l'imperfection de quelques-uns des instruments.

La valeur moyenne de la masse de Mars, d'après ces trois groupes d'observations et en ayant égard à leur degré probable d'exactitude, est

$$m = \frac{1}{3107713},$$

résultat très-concordant avec celui de Hall et donnant la plus grande confiance dans la valeur de celui-ci.

La masse de Mars a fréquemment changé de valeur depuis Laplace, et toujours en diminuant; Laplace assignait à la masse de Mars la valeur

$$m = \frac{1}{1846082};$$

Delambre la réduisit à

$$m = \frac{1}{2546320};$$

les *Éphémérides américaines* donnent, d'après Burckhardt,

$$m = \frac{1}{2680337};$$

les *Tables du Soleil* de Hansen et Olufsen donnent

$$m = \frac{1}{3200900}:$$

Le Verrier, dans ses *Annales,* adopte d'abord la valeur de Burckhardt, puis la réduit à

$$m = \frac{1}{2994790},$$

et, dans le XIe Volume, la réduit encore à

$$m = \frac{1}{2812526};$$

Hall, d'après ses observations de Washington, a trouvé, comme on l'a vu déjà,

$$m = \frac{1}{3093500 \pm 3295}.$$

Les éléments trouvés des orbites des satellites montrent qu'ils se meuvent tous deux dans un plan très-voisin de l'équateur de Mars et permettent de déduire toutes les particularités de leurs mouvements. Le mouvement horaire aréocentrique de Phobos est de $47°,033$; la rapidité de ce mouvement et sa proximité de Mars doivent produire des effets très-curieux pour un observateur placé sur la planète; il atteint et dépasse l'autre satellite Deimos, dont le mouvement horaire est seulement de $11°,882$; leurs distances respectives à Mars sont de 26800 et 10700 kilomètres pour Deimos et Phobos. Le rayon de la planète étant de 3885 kilomètres, la parallaxe horizontale de ce dernier satellite atteint 21 degrés.

La grandeur des satellites n'est pas bien connue; peut-être est-on seulement en droit de dire qu'ils sont fort petits. Une détermination photométrique du professeur Pickering, directeur de l'Observatoire de Harvard College (Cambridge, États-Unis), d'après des observations encore inédites, assigne à Deimos un diamètre de 11 kilomètres et un de 13 kilomètres à Phobos. L'astronome irlandais Wentworth Erck attribue à Deimos un diamètre de 26 kilomètres; ses observations sont publiées dans l'*Astronomical Register,* janvier 1878. Quant à l'éclat des satellites, d'après l'examen de toutes les observations connues et l'opinion des observateurs, Hall considère que Deimos, pendant l'opposition et à son élongation, est de la douzième grandeur de l'échelle d'Argelander; Phobos est un peu plus brillant.

Il est très-important de déterminer l'éclat apparent des satellites, car on peut, d'un côté chercher d'avance les oppositions favorables de Mars où ils seront visibles, d'un autre se rendre compte des causes d'insuccès de leurs observations jusqu'à ce jour.

Si r et Δ sont les distances d'un corps au Soleil et à la Terre, l'éclat de ce corps réfléchissant est représenté par $\frac{c}{r^2\Delta^2}$, c étant une constante.

D'après cela, Hall dressa le Tableau suivant, en prenant pour unité d'éclat l'éclat de Deimos, vu le 1[er] octobre 1877 dans l'équatorial de 9,6 pouces de l'Observatoire naval des États-Unis; la déclinaison de Mars ayant de l'influence sur l'éclat, est donnée en regard des coefficients

Dates.		Éclat.	Déclinaison.	Remarques.
			°	
1783.	2 octobre....	1,12	— 0,7	Observations d'Herschel.
1798.	2 septembre........	1,35	—14,3	»
1815.	17 octobre..........	0,97	+ 6,7	»
1830.	13 septembre........	1,27	— 5,9	»
1843.	4 juin............	0,79	—25,3	»
1845.	18 août.............	1,38	—19,4	»
1847.	23 octobre..........	0,86	+13,3	»
1860.	22 juillet...........	1,21	—27,5	»
1862.	29 septembre........	1,13	+ 1,9	Observations de d'Arrest.
1864.	23 novembre........	0,55	+23,8	»
1875.	28 juin.............	0,94	—27,7	»
1877.	11 août.............	1,14	—10,2	Date de la découverte.
1877.	2 septembre.... ...	1,35	—11,9	»
1877.	1[er] octobre.........	1,00	—12,5	»
1877.	15 octobre..........	0,75	—11,3	»
1877.	31 octobre..........	0,52	— 8,9	»
1879.	10 octobre..........	0,63	+18,4	»
1879.	4 novembre........	0,73	+18,3	»
1879.	29 novembre........	0,56	+17,2	»

Herschel s'est trouvé, en 1783, à peu près dans les mêmes conditions qu'au moment de la découverte. Les oppositions les plus favorables ont été celles de 1798, 1830, 1845, 1862 et 1877; en 1860 et 1875, la grande déclinaison sud de la planète rendait les observations très-difficiles pour les observatoires septentrionaux. Les satellites seront visibles du 10 octobre au 29 novembre 1879, et les observations seront favorisées par la faible distance zénithale.

8. Pour faciliter les observations de 1879, il reste à établir les éphémérides pour cette année. Les éléments en sont rapportés à midi moyen de Greenwich ; les quantités f, F, g, G sont les auxiliaires de Bessel, calculées pour la position de l'orbite de Deimos, mais suffisantes en outre pour les éphémérides de Phobos. Les valeurs de u sont données pour chaque satellite, u_1 pour Phobos et u_2 pour Deimos; cet angle est estimé dans l'hypothèse d'orbites circulaires. Comme du 28 août 1877 au 1er novembre 1879 il y aura 629 révolutions de Deimos et 2490 de Phobos, les erreurs probables de périodicité de ces satellites produiront les erreurs probables suivantes sur leurs longitudes :

Pour Deimos........ $\Delta u = \pm\ 2^\circ,62$,
Pour Phobos........ $\Delta u = \pm 36^\circ,53$.

L'erreur de l'angle de position provenant de Δu sera donnée par la relation

$$\Delta p = \frac{a}{\rho s}\left[f\cos p\cos(F+u) - g\sin p\cos(G+u)\right]\Delta u,$$

ρ étant la distance de Mars à la Terre. Pour Deimos l'erreur probable sera très-faible, et pour Phobos elle ne peut produire aucune erreur dans le nombre de révolutions accomplies par ce satellite.

Éphémérides de 1879.

Greenwich. T. M.	$\log f$.	F.	$\log g$.	G.	Phobos. u_1.	Deimos. u_2.	Aberration.
1879		° ′		° ′	°	°	m
Oct. 10,0	9,91248	349.19,2	9,77912	328.43,3	203,14	109,69	−4,4
12,0	9,91240	349.31,1	9,77974	328.40,3	300,73	320,02	−4,4
14.0	9,91227	349.47,4	9,78053	328.39,1	38,32	170,35	−4,3
16.0	9,91213	350. 8,4	9,78147	328,39,4	135,91	20,68	−4,2
18.0	9,91192	350.33,9	9,78257	328.41,3	233,50	231,01	−4,2
20.0	9,91173	351. 3,5	9,78381	328.44,8	331,08	81,34	−4,2
22.0	9,91152	351.37,7	9,78517	328.49,8	68,67	291,68	−4,1
24.0	9,91129	352.15,6	9,78665	328.56,5	166,26	142,01	−4,1
26.0	9,91105	352.57,3	9,78824	329. 4,6	263,85	352,34	−4,1
28.0	9,91083	353.42,3	9,78990	329.14,0	1,43	202,67	−4,0
30.0	9,91062	354.30,3	9,79163	329.24,9	99,02	53,00	−4,0
Nov. 1.0	9,91042	355.21,1	9,79340	329.37,1	196,61	263,33	−4,0
3.0	9,91026	356.14,1	9,79520	329.50,6	294,20	113,66	−4,0
5.0	9,91012	357. 8,8	9,79701	330. 5,0	31,78	323,99	−4,0
7.0	9,91002	358. 4,8	9,79881	330.20,2	129,37	174,32	−4,0
9.0	9,90996	359. 1,6	9,80057	330.36,1	226,96	24,65	−4,0
11.0	9,90994	359.58,5	9,80228	330.52,7	324,55	234,98	−4,0
13.0	9,90996	0.55,1	9,80391	331. 9,7	62,13	85,31	−4,1
15.0	9,91002	1.50,8	9,80553	331.26,1	159,72	295,64	−4,1
17.0	9,91011	2.45,1	9,80702	331.42,8	257,31	145,98	−4,1
19.0	9,91023	3.37,3	9,80845	331.58,9	354,90	356,31	−4,2
21.0	9,91038	4.27,1	9,80977	332.14,4	92,49	206,64	−4,2
23.0	9,91054	5.14,2	9,81100	332.29,2	190,08	56,97	−4,3
25.0	9,91074	5.58,1	9,81213	332.42,7	287,66	267,30	−4,3
27.0	9,91093	6.38,7	9,81314	332.55,3	25,25	117,63	−4,4
29.0	9,91112	7.15,5	9,81407	333. 6,5	122,84	327,96	−4,5

Dans cette Table, les valeurs de u sont données en degrés et en décimales de degré; celles du mouvement diurne, estimées de la même manière, et celles des moyennes distances des satellites sont les suivantes :

Phobos....... $a = 12'',9531$, $\mu = 1128°,794$.
Deimos....... $a = 32'',3541$, $\mu = 285°,1645$.

L'angle de position et la distance seront donnés par les formules

$$s \sin p = \frac{a}{\rho} f \sin(\mathrm{F} + u)$$

et

$$s\cos p = \frac{a}{\rho} g \sin(G+u).$$

La valeur de u se tirera par interpolation des valeurs de u_1 ou de u_2, suivant le cas.

Ainsi, pour avoir la position de Deimos le 20 octobre 1879, on prend u dans la Table précédente et l'on a le calcul suivant :

$$u = 81°.20',4 \qquad \log a = 1,5099$$
$$F = 351.\ 3,5 \qquad \log \rho = 9,7002$$
$$G = 328.44,8$$

$F+u = 72.24$	$\sin(F+u) = 9,9792$	$\sin(G+u) = 9,8848$
$G+u = 50.\ 5$	$f = 9,9117$	$g = 9,7838$
	$\frac{a}{\rho} = 1,8097$	$\frac{a}{\rho} = 1,8097$
	$s\sin p = 1,7006$	
	$s\cos p = 1,4783$	$p = 59°,06$
	$\sin p = 9,9333$	$s = 58'',52$

Si l'on veut de la position des deux satellites le 1er novembre 1879 à minuit moyen de Washington, qui correspond à $17^h 8^m,2$ de Greenwich, le calcul se fera comme il suit :

$$\Delta t = 17^h 8^m,2 = 0^j,7140.$$

Phobos.	*Deimos.*
$\log \Delta t = 9,85370$	$\log \Delta t = 9,85370$
$\log \mu = 3,05261$	$\log \mu = 2,45510$
$\Delta u = 805°.95'$	$\Delta u = 203°.61'$
196.61	263.33
$u = 282.34$	$u = 106.56$
$F = 355.40$	$F = 355.40$
$G = 329.42$	$G = 329.42$
$F+u = 278.14$	$F+u = 102.36$
$G+u = 252.16$	$G+u = 76.38$
$\log a = 1,1124$	$\log a = 1,5099$
$\log \rho = 9,6839$	$\log \rho = 9,6839$

$\sin(F+u)$	$9,9955n$	$\sin(G+u)$	$9,9789n$	$\sin(F+u)$	$9,9894$	$\sin(G+u)$	$9,9880$
f........	$9,9103$	g.......	$9,7941$	f.......	$9,9103$	g........	$9,7941$
$\frac{a}{\rho}$........	$1,4285$	$\frac{a}{\rho}$.......	$1,4285$	$\frac{a}{\rho}$.......	$1,8260$	$\frac{a}{\rho}$........	$1,8260$
$s\sin p$....	$1,3343n$			$s\sin p$..	$1,7257$		
$s\cos p$...	$1,2015n$	p.......	$233^\circ,63$	$s\cos p$...	$1,6081$	p........	$52^\circ,67$
$\sin p$.....	$9,9059n$			$\sin p$....	$9,9004$		
		s.......	$26'',82$			s........	$66'',88$

A cet instant, l'erreur probable de u donnera les erreurs probables suivantes dans les angles de positions :

Pour Phobos....... $\pm 8^\circ,09$,
Pour Deimos....... $\pm 0^\circ,58$.

Ces exemples suffisent pour montrer la marche à suivre dans chaque cas particulier. Si l'on veut observer un satellite et comparer l'angle observé et la distance avec leurs valeurs estimées, on commencera par corriger le temps de l'observation de l'aberration, avant de le rapporter au temps de Greenwich.

L'examen des éphémérides pour 1879 montre que les élongations des satellites auront lieu pour des angles de position de 53 degrés ou 233 degrés, le maximum de distance apparente sera de 27 secondes pour Phobos et de 67 pour Deimos. Les ellipses apparentes décrites par les satellites pendant cette opposition de Mars seront un peu plus excentriques que celles de 1877, et l'extrémité du petit axe de la trajectoire de Deimos ne sera qu'à quelques secondes du limbe de la planète. La déclinaison de la planète étant alors de 18 degrés Nord, il y a lieu de compter sur une excellente série d'observations.

Complément à une étude de 1871 *sur la théorie de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques dont certaines dimensions sont très-petites par rapport à d'autres* [*].

PAR M. J. BOUSSINESQ.

I. — CARACTÈRE DISTINCTIF DES MODES D'ÉQUILIBRE QUE PRÉSENTENT LES CORPS TRÈS-ALLONGÉS OU TRÈS-APLATIS (TIGES ET PLAQUES).

1. L'équilibre statique ou dynamique d'une tige et d'une plaque présente un caractère important, tenant à la forme même, très-allongée ou très-aplatie, de ces corps, et qui permet d'en donner une théorie approchée beaucoup plus simple que la théorie générale de l'élasticité des solides.

Concevons la tige ou la plaque divisée en tronçons sensiblement prismatiques, dont chacun, limité par la surface même du corps et par un couple de plans parallèles menés à peu près normalement à cette surface, dans le cas d'une tige, ou par deux couples de plans pareils dans le cas d'une plaque, ait ses trois dimensions comparables entre elles. Deux tronçons voisins se trouveront dans des conditions à fort peu près pareilles, tant sous le rapport de leur position relativement à l'ensemble du système, à ses limites, aux surfaces de part et d'autre desquelles la constitution des tronçons varierait rapidement de l'un à l'autre, etc., que sous le rapport des forces extérieures appliquées à

[*] Étude insérée dans le Volume de 1871 du *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (2e série, t. XVI). Le complément actuel a pour but de simplifier et d'étendre les théories exposées dans cette Étude. Diverses circonstances en ont retardé la publication jusqu'à ce jour, quoique sa rédaction date de novembre 1876 (tant pour la partie imprimée ici, dans les nos de mai et juin, que pour celle qui concerne les plaques et qui, je l'espère, suivra très-prochainement).

la masse et à la superficie de la tige ou de la plaque. Il n'y aura d'exceptions que pour des régions relativement peu étendues, voisines de points présentant quelque particularité, comme seront, par exemple, les extrémités d'une tige, le contour d'une plaque, les points d'application de forces extérieures exceptionnellement grandes. Si donc on fait abstraction de ces régions restreintes, l'équilibre d'un tronçon quelconque à fort peu près prismatique présentera cette circonstance, que les composantes N, T des pressions et les déformations ∂, g y seront sensiblement les mêmes, soit tout le long d'une même *fibre longitudinale* perpendiculaire aux bases du prisme, s'il s'agit d'une tige, soit sur toute l'étendue d'une *couche* quelconque parallèle aux bases du prisme, s'il s'agit d'une plaque. Au contraire, les mêmes pressions et déformations varieront en général d'une manière très-notable dans les sens des dimensions transversales d'une tige ou dans celui de l'épaisseur d'une plaque. Il est d'ailleurs évident que les actions extérieures directement appliquées à la masse du tronçon (y compris l'inertie dans le cas d'un équilibre dynamique), et celles qui le sont à la portion de la superficie du corps qui fait partie de la surface du tronçon, n'ont qu'une influence minime sur les forces N, T, toutes ces actions n'étant presque rien en comparaison de celles qui agissent sur le reste du corps et dont l'ensemble donne lieu aux réactions intérieures N, T.

Les pressions se trouveront donc presque réparties, aux divers points d'un tronçon, comme elles le seraient dans un prisme droit sensiblement égal, d'une constitution peu différente de la sienne, et la même tout le long d'une perpendiculaire quelconque aux bases s'il s'agit d'un tronçon de tige, ou sur toute l'étendue d'un plan quelconque parallèle aux bases s'il s'agit d'un tronçon de plaque : la masse du prisme, et sa surface latérale dans le cas de la tige, ou ses bases dans le cas de la plaque, étant d'ailleurs supposées libres de toute action extérieure, tandis que sa matière serait sollicitée et déformée pareillement, soit tout le long d'une perpendiculaire aux bases, dans le premier cas, soit aux divers points d'un plan quelconque parallèle aux bases, dans le second.

De pareils modes simples d'équilibre d'un prisme devant servir de *type* à ceux que présentera une tige ou une plaque, c'est par eux que nous commencerons l'étude de chacune de ces deux espèces de corps.

II. — Des modes d'équilibre d'un prisme qui servent de type a ceux d'un tronçon de tige.

2. Nous supposerons la contexture symétrique par rapport aux bases du prisme, c'est-à-dire par rapport aux sections normales de la tige, comme il arrivera toujours dans la pratique, et nous prendrons pour plan des yz une de ces bases du prisme dans l'état primitif, pour axe des x une perpendiculaire menée vers l'autre base. J'appellerai :

σ toute section du prisme par un plan parallèle aux yz;
α l'angle que la normale à un élément de son contour, menée vers le dehors, fera avec l'axe des y;
$\frac{\pi}{2} - \alpha$ ou $\alpha - \frac{\pi}{2}$ l'angle que fera la même normale avec l'axe des z.

Les équations indéfinies de l'équilibre seront, avec les notations de Lamé, bien connues :

$$(1)\quad \frac{dT_3}{dy} + \frac{dT_2}{dz} = -\frac{dN_1}{dx},\quad \frac{dN_2}{dy} + \frac{dT_1}{dz} = -\frac{dT_3}{dx},\quad \frac{dT_1}{dy} + \frac{dN_3}{dz} = -\frac{dT_2}{dx}.$$

Il faudra y joindre les conditions spéciales au contour,

$$(2)\qquad (\text{sur le contour})\ \begin{cases} T_3\cos\alpha + T_2\sin\alpha = 0, \\ N_2\cos\alpha + T_1\sin\alpha = 0, \\ T_1\cos\alpha + N_3\sin\alpha = 0, \end{cases}$$

conditions qui signifient que la surface latérale ne supporte aucune pression.

Dans le cas où le corps serait composé de plusieurs prismes de constitution différente accolés sur toute leur longueur, il y aurait à vérifier en outre, sur leur surface de séparation, six conditions spéciales exprimant, les unes, l'égalité des petits déplacements moléculaires u, v, w des deux côtés de chaque élément de ces surfaces, les autres, l'égalité deux à deux, avec signes contraires, des composantes des pressions appliquées aux deux faces de l'élément superficiel considéré.

La contexture étant d'ailleurs symétrique par rapport au plan des

yz, les six déformations

$$(3)\quad \begin{cases} \partial_x = \dfrac{du}{dx}, \quad \partial_y = \dfrac{dv}{dy}, \quad \partial_z = \dfrac{dw}{dz}, \\ g_{yz} = \dfrac{dv}{dz} + \dfrac{dw}{dy}, \quad g_{zx} = \dfrac{dw}{dx} + \dfrac{du}{dz}, \quad g_{xy} = \dfrac{du}{dy} + \dfrac{dv}{dx}, \end{cases}$$

dilatations et glissements éprouvés par des éléments matériels rectilignes menés primitivement parallèles aux axes à partir du point quelconque (x, y, z), s'exprimeront en fonction des pressions N, T au moyen de formules de la forme

$$(4)\quad \begin{cases} \partial_x = A(N_1 - \beta N_2 - \beta' N_3 - \beta'' T_1), \\ \partial_y = -\eta A N_1 + \text{trois termes en } N_2, N_3, T_1, \\ \partial_z = -\eta' A N_1 + \text{trois termes en } N_2, N_3, T_1, \\ g_{yz} = -\eta'' A N_1 + \text{trois termes en } N_2, N_3, T_1, \\ g_{zx} = G T_2 + H T_3, \\ g_{xy} = G' T_3 + H' T_2. \end{cases}$$

Les coefficients spécifiques $A, \beta, \beta', \beta'', \ldots, G, H, G', H'$ ne dépendront pas de x, à cause de l'homogénéité admise aux divers points de chacune des fibres parallèles aux x d'un bout à l'autre du tronçon; mais ils varieront d'une manière quelconque en fonction de y, z. J'admettrai toutefois que les trois nombres η, η', η'' soient constants; ce qui revient à supposer qu'*il s'agit d'une tige dont toutes les fibres, si on les isolait les unes des autres*, de manière à avoir

$$N_2 = 0, \quad N_3 = 0, \quad T_1 = 0,$$

éprouveraient d'égales déformations latérales

$$\partial_y = -\eta \partial_x, \quad \partial_z = -\eta' \partial_x, \quad g_{yz} = -\eta'' \partial_x$$

sous l'effet de tractions produisant sur toutes une même dilatation longitudinale ∂_x.

5. On sait encore que l'expression

$$(5)\quad N_1 \partial_x + N_2 \partial_y + N_3 \partial_z + T_1 g_{yz} + T_2 g_{zx} + T_3 g_{xy},$$

homogène et du second degré en $N_1, N_2, \ldots, T_3$ quand on y remplace

les ∂, g par leurs valeurs (4), est essentiellement positive, à cause du fait de la consommation d'un certain travail par tout corps qu'on écarte de son état naturel. D'après les formules (4), nous pourrons dédoubler cette expression en deux autres, dont l'une ne contiendra que T_2, T_3 et l'autre que N_1, N_2, N_3, T_1.

Nous décomposerons celle-ci,

$$(6) \qquad N_1 \partial_x + N_2 \partial_y + N_3 \partial_z + T_1 g_{yz},$$

en quatre carrés, de la manière suivante. Après avoir substitué à $\partial_x, \partial_y, \partial_z, g_{yz}$ leurs valeurs (4), remarquons que A est > 0 [vu que l'expression essentiellement positive (6) se réduit à AN_1^2 quand N_2, N_3, T_1 s'annulent]. Groupons ensemble les termes affectés de N_1, en y ajoutant d'ailleurs, pour le retrancher de l'autre groupe de termes, le carré $\frac{A}{4}[(\beta N_2 + \beta' N_3 + \beta'' T_1) + (\eta N_2 + \eta' N_3 + \eta'' T_1)]^2$. L'expression (6) se composera : 1° du carré

$$(7) \qquad \frac{A}{4}[2N_1 - (\beta N_2 + \beta' N_3 + \beta'' T_1) - (\eta N_2 + \eta' N_3 + \eta'' T_1)]^2 :$$

2° d'un polynôme homogène du second degré en N_2, N_3, T_1. Ce dernier devra rester positif pour toutes les valeurs de N_2, N_3, T_1, car l'expression (6) se réduit à cette seconde partie quand on prend

$$N_1 = \tfrac{1}{2}(\beta N_2 + \beta' N_3 + \beta'' T_1) + \tfrac{1}{2}(\eta N_2 + \eta' N_3 + \eta'' T_1).$$

En traitant le polynôme dont il s'agit comme il vient d'être fait pour l'expression proposée (6), on en extraira de même successivement trois carrés, qui contiendront : le premier, N_2, N_3, T_1 ; le deuxième, N_3, T_1 ; le troisième, T_1.

Le terme (7) peut encore s'écrire identiquement, à cause de la première formule (4),

$$\begin{aligned}
&\frac{A}{4}\left[\frac{\partial_x}{A} + (N_1 - \eta N_2 - \eta' N_3 - \eta'' T_1)\right]^2 \\
&\quad = \frac{A}{4}\left[\frac{\partial_x}{A} - (N_1 - \eta N_2 - \eta' N_3 - \eta'' T_1)\right]^2 + \partial_x(N_1 - \eta N_2 - \eta' N_3 - \eta'' T_1) \\
&\quad = \frac{A}{4}[(\eta - \beta)N_2 + (\eta' - \beta')N_3 + (\eta'' - \beta'')T_1]^2 \\
&\qquad + \partial_x N_1 - \partial_x(\eta N_2 + \eta' N_3 + \eta'' T_1).
\end{aligned}$$

Égalons l'expression (6) à ce dernier membre, augmenté, comme il a été dit, d'une somme de trois carrés, ayant la forme

$$\mathfrak{b}(N_2 + \gamma N_3 + \gamma' T_1)^2 + \mathfrak{c}(N_3 + \gamma'' T_1)^2 + \mathfrak{d} T_1^2,$$

où $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ sont trois coefficients plus grands que zéro; puis supprimons de part et d'autre le terme $N_1 \partial_x$. Il viendra

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} & N_2 \partial_y + N_3 \partial_z + T_1 g_{yz} \\ & \quad = \frac{A}{4}[(\eta - \beta) N_2 + (\eta' - \beta') N_3 + (\eta'' - \beta'') T_1]^2 \\ & \qquad + \mathfrak{b}(N_2 + \gamma N_3 + \gamma' T_1)^2 + \mathfrak{c}(N_3 + \gamma'' T_1)^2 + \mathfrak{d} T_1^2 \\ & \qquad - \partial_x (\eta N_2 + \eta' N_3 + \eta'' T_1). \end{aligned} \right.$$

4. Enfin, *la supposition, spéciale à notre problème, d'après laquelle l'état de la matière est le même en tous les points d'une parallèle à l'axe des x*, s'exprimera par les six relations

$$(9)\qquad \frac{d}{dx}(N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3) = 0.$$

Nous nous contenterons d'abord d'admettre les cinq conditions suivantes, qu'entraînent les formules (9), mais qui sont moins particulières :

$$(9\ bis)\qquad \frac{d}{dx}(T_3, T_2) = 0, \quad \frac{d^2}{dx^2}(N_2, N_3, T_1) = 0.$$

Les résultats auxquels nous arriverons ainsi pourront donc s'appliquer, non-seulement aux modes d'équilibre pour lesquels les relations (9) sont satisfaites, mais aussi à ceux pour lesquels ces relations (9) ne le sont pas, quoique les équations (9 *bis*) continuent à l'être. Ceux-ci seront les modes d'équilibre d'un tronçon de tige, dans le cas où l'on admettra que les forces tangentielles T_3, T_2 soient beaucoup plus petites que N_1 et où l'on fera une étude de deuxième approximation du mode d'équilibre. Il est évident, en effet, qu'on aura, dans ce cas, une première approximation en annulant T_3, T_2 et supposant indépendantes de x les autres forces N, T : par suite, une approximation plus élevée s'obtiendra en attribuant, d'une part, à T_3, T_2, de petites valeurs, relativement peu variables d'un bout à l'autre du tronçon ou qui aient leurs dérivées

en x assimilables à zéro, d'autre part, à N_2, N_3, T_1, des valeurs variables linéairement ou ayant leurs dérivées secondes en x insensibles, comme il arrive pour toute fonction qu'on ne considère que dans une partie restreinte du *champ* total où se produisent ses variations. Ainsi *les modes d'équilibre vérifiant les relations* (9 *bis*) *seront toujours une première approximation de ceux que présentera un tronçon de tige; et ils en seront même une deuxième approximation, dans le cas où les composantes tangentielles*, T_3, T_2, *des pressions exercées sur les sections normales de la tige, n'égaleraient que de petites fractions de la composante normale correspondante* N_1.

Toutefois, les deux dernières équations indéfinies (1) et les deux dernières conditions spéciales (2) ne continueront alors à être admissibles, à la deuxième approximation, qu'autant que la forme du tronçon, à l'état naturel, différera assez peu de celle d'un prisme, et que les composantes transversales (dirigées suivant les y et les z) des actions extérieures exercées sur la masse et sur la surface latérale du tronçon continueront à être négligeables, même à cette approximation, ou ne seront pas d'un ordre de grandeur plus élevé que les dérivées $\frac{d}{dx}(T_3, T_2)$. Quant à la première équation (1), il faudra généralement ajouter à son premier membre la composante suivant les x de l'action extérieure exercée par unité de volume sur le tronçon, composante dont les dérivées par rapport à x continueront seules à être négligeables.

5. Cela posé, on reconnaît, en différentiant par rapport à x la première équation (1) ainsi complétée et tenant compte des deux premières conditions (9 *bis*), que la dérivée seconde de N_1 en x s'annule. Comme il en est de même, d'après les trois dernières conditions (9 *bis*), des dérivées secondes en x de N_2, N_3, T_1, les quatre premières formules (4) montrent qu'on a

$$\frac{d^2}{dx^2}(\partial_x, \partial_y, \partial_z, g_{yz}) = 0. \tag{10}$$

Les deux dernières formules (4) donnent de même, grâce aux deux premières conditions (9 *bis*),

$$\frac{d}{dx}(g_{xy}, g_{zx}) = 0. \tag{10 bis}$$

Or celles-ci (10 *bis*), d'après les formules (3), reviennent à poser

$$(11) \qquad \frac{d\partial_x}{dy} = -\frac{d^2 v}{dx^2}, \quad \frac{d\partial_x}{dz} = -\frac{d^2 w}{dx^2}.$$

Les seconds membres de (11) varient avec continuité dans toute l'étendue d'une section normale σ du prisme; car les déplacements v, w sont égaux, à moins de rupture, de part et d'autre de la surface de séparation de deux tiges de constitution différente accolées, et, par suite, leurs dérivées secondes en x sont aussi égales de part et d'autre. En outre, la dérivée en y du second membre de la première (11) et la dérivée en z du second membre de la deuxième (11) sont nulles, en vertu de deux des relations (10); de plus, les équations (11), respectivement différentiées, la première par rapport à z, la seconde par rapport à y, puis ajoutées, montrent, à cause de la quatrième (10), que l'on a $\frac{d^2\partial_x}{dy\,dz} = 0$. Par suite, les deux dérivées $\frac{d^2 v}{dx^2}$, $\frac{d^2 w}{dx^2}$ ne dépendent ni de y ni de z et ne varient pas d'un point à un autre d'une même section. Pour fixer les idées, je supposerai qu'on y mette les valeurs v_0, w_0 des déplacements transversaux v, w pour $y = 0$, $z = 0$: les dérivées considérées représenteront les courbures prises par les projections, sur le plan des xy et sur celui des xz, d'une ligne matérielle primitivement droite et normale à une base du prisme ou du tronçon.

Les seconds membres de (11) étant ainsi constants aux divers points d'une même section σ ou égaux à $-\frac{d^2 v_0}{dx^2}$, $-\frac{d^2 w_0}{dx^2}$, les équations (11), multipliées respectivement par dy, dz, puis ajoutées et intégrées en appelant ∂_0 la dilatation éprouvée par la fibre matérielle primitivement tangente à l'axe des x, donnent

$$(12) \qquad \partial_x = \partial_0 - \frac{d^2 v_0}{dx^2} y - \frac{d^2 w_0}{dx^2} z.$$

6. Cherchons maintenant les valeurs des forces élastiques N_2, N_3, T_1. Les deux premières relations (9 *bis*) changent la seconde et la troisième des équations indéfinies (1) en celles-ci :

$$(13) \qquad \frac{dN_2}{dy} + \frac{dT_1}{dz} = 0, \quad \frac{dT_1}{dy} + \frac{dN_3}{dz} = 0.$$

Multiplions-les respectivement par $\mathrm{V}\,dy\,dz$, $\mathrm{W}\,dy\,dz$, V, W désignant deux fonctions continues quelconques de y, z; puis ajoutons les résultats et intégrons dans toute l'étendue d'une section normale σ du prisme, après avoir remplacé

$$\mathrm{V}\left(\frac{d\mathrm{N}_2}{dy}+\frac{d\mathrm{T}_1}{dz}\right) \quad \text{par} \quad \frac{d\mathrm{VN}_2}{dy}+\frac{d\mathrm{VT}_1}{dz}-\mathrm{N}_2\frac{d\mathrm{V}}{dy}-\mathrm{T}_1\frac{d\mathrm{V}}{dz},$$
$$\mathrm{W}\left(\frac{d\mathrm{T}_1}{dy}+\frac{d\mathrm{N}_3}{dz}\right) \quad \text{par} \quad \frac{d\mathrm{WT}_1}{dy}+\frac{d\mathrm{WN}_3}{dz}-\mathrm{T}_1\frac{d\mathrm{W}}{dy}-\mathrm{N}_3\frac{d\mathrm{W}}{dz}.$$

Une méthode bien connue permet de transformer les termes exactement intégrables une fois en des intégrales prises sur tout le contour limite s' de chacune des régions à l'intérieur desquelles les variations de N_2, N_3, T_1 sont continues. Si $\int_{s'}$ désigne une intégrale prise tout le long de ce contour limite, ds' un élément du même contour, α' l'angle que sa normale, menée hors de la région considérée, fait avec les y positifs, les termes dont il s'agit donneront en tout, pour la région,

$$\int_{s'}[\mathrm{V}(\mathrm{N}_2\cos\alpha'+\mathrm{T}_1\sin\alpha')+\mathrm{W}(\mathrm{T}_1\cos\alpha'+\mathrm{N}_3\sin\alpha')]\,ds'.$$

En faisant la somme des résultats analogues pour toutes les régions composant la section σ, les deux éléments d'intégrale relatifs à un même arc ds' contigu à deux régions seront égaux et contraires, en vertu des deux dernières conditions spéciales aux surfaces de séparation et à cause de la continuité supposée de V, W. D'autre part, les éléments d'intégrale se rapportant au contour libre de la section seront identiquement nuls, en vertu des deux dernières relations (2). Donc, si l'on représente par $d\sigma$ un élément quelconque de la section normale σ du prisme, par $\int_\sigma$ une intégrale prise sur toute la section, et si l'on change les signes, il viendra simplement

$$(14) \qquad \int_\sigma\left[\mathrm{N}_2\frac{d\mathrm{V}}{dy}+\mathrm{N}_3\frac{d\mathrm{W}}{dz}+\mathrm{T}_1\left(\frac{d\mathrm{V}}{dz}+\frac{d\mathrm{W}}{dy}\right)\right]d\sigma=0.$$

Posons successivement, dans cette formule :

1° $\mathrm{W}=0$ et $\mathrm{V}=y,\ =z,\ =y^2,\ =yz,\ =z^2$;

2° $\mathrm{V}=0$ et $\mathrm{W}=z,\ =y,\ =z^2,\ =zy,\ =y^2$.

Il viendra

$$\int_\sigma N_2 d\sigma = 0, \quad \int_\sigma T_1 d\sigma = 0, \quad \int_\sigma N_2 y\, d\sigma = 0,$$
$$\int_\sigma (N_2 z + T_1 y)\, d\sigma = 0, \quad \int_\sigma T_1 z\, d\sigma = 0;$$
$$\int_\sigma N_3 d\sigma = 0, \quad \int_\sigma T_1 d\sigma = 0, \quad \int_\sigma N_3 z\, d\sigma = 0,$$
$$\int_\sigma (N_3 y + T_1 z)\, d\sigma = 0, \quad \int_\sigma T_1 y\, d\sigma = 0.$$

Ces relations reviennent en tout à neuf, condensées dans la formule unique

$$(15) \qquad \int_\sigma (N_2, N_3 \ \text{ou}\ T_1)(1, y \ \text{ou}\ z)\, d\sigma = 0.$$

Posons encore $V = v$, $W = w$, et observons que les quantités $\frac{dv}{dy}$, $\frac{dw}{dz}$, $\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}$ ne sont autres que ∂_y, ∂_z, g_{yz}. La formule (14) donnera

$$(16) \qquad \int_\sigma (N_2 \partial_y + N_3 \partial_z + T_1 g_{yz})\, d\sigma = 0.$$

Nous pouvons remplacer dans celle-ci $N_2\partial_y + N_3\partial_z + T_1 g_{yz}$ par le second membre de (8) et remarquer d'ailleurs que, vu la valeur (12) de ∂_x, les formules (15) rendent nulles les intégrales

$$\int_\sigma \partial_x N_2\, d\sigma, \quad \int_\sigma \partial_x N_3\, d\sigma, \quad \int_\sigma \partial_x T_1\, d\sigma.$$

Les nombres η, η', η'' étant constants, il viendra

$$(17) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\int_\sigma \Big\{ \mathrm{d} T_1^2 + \mathrm{c}(N_3 + \gamma'' T_1)^2 + \mathrm{b}(N_2 + \gamma N_3 + \gamma' T_1)^2 \\ &\quad + \frac{A}{4} [(\eta - \beta) N_2 + (\eta' - \beta') N_3 + (\eta'' - \beta'') T_1]^2 \Big\} d\sigma = 0. \end{aligned} \right.$$

L'intégrale qui constitue le premier membre de cette relation a chacun de ses éléments égal à la somme de quatre carrés; elle ne peut être nulle que si tous ces carrés s'annulent, c'est-à-dire si l'on a partout

$$(18) \qquad T_1 = 0, \quad N_3 = 0, \quad N_2 = 0.$$

Ces formules expriment que les composantes, suivant les y et les z, de la pression mutuelle de deux fibres quelconques sont nulles : en d'autres termes, *chaque fibre longitudinale n'exerce sur ses voisines que des actions qui lui sont parallèles.*

7. Des six composantes N, T il ne subsiste plus que les trois N_1, T_3, T_2. La composante normale N_1 aura pour expression, d'après la première formule (4) et l'expression (12) de ∂_x, en appelant d'ailleurs E, suivant l'usage, le coefficient d'élasticité $\frac{1}{A}$,

$$N_1 = \frac{1}{A}\partial_x = E\partial_x = E\left(\partial_0 - \frac{d^2 v_0}{dx^2}y - \frac{d^2 w_0}{dx^2}z\right). \tag{19}$$

De plus, la seconde, la troisième et la quatrième des relations (4) deviennent

$$(20)\quad \left\{\begin{array}{l} \partial_y = -\eta\partial_x, \quad \partial_z = -\eta'\partial_x, \quad g_{yz} = -\eta''\partial_x, \\ \text{où} \\ \qquad \partial_x = \partial_0 - \dfrac{d^2 v_0}{dx^2}y - \dfrac{d^2 w_0}{dx^2}z. \end{array}\right.$$

Il est clair que ces valeurs de ∂_y, ∂_z, g_{yz} définissent complétement le mode de déformation de chaque section normale σ dans les sens parallèles à son plan primitif. A part une petite rotation qu'aura généralement éprouvée en outre la section σ, d'abscisse x, autour d'une fibre longitudinale dont on peut supposer que l'élément dx coïncide constamment avec l'axe des x, on voit que la position de cette section déformée sera déterminée, quant à la projection de ses divers points sur un plan mené normalement à la fibre considérée par le point où celle-ci perce la section, en fonction de la dilatation ∂_0 de cette fibre au même point et des deux courbures $\frac{d^2 v_0}{dx^2}$, $\frac{d^2 w_0}{dx^2}$ qu'y présente, en projection sur deux plans rectangulaires des xy et des xz, une ligne matérielle primitivement droite et tangente à la fibre.

Les deux courbures $\frac{d^2 v_0}{dx^2}$, $\frac{d^2 w_0}{dx^2}$ mesurent ce qu'on appelle les deux *flexions* éprouvées par le prisme sur la section considérée σ et dans les sens respectifs des y et des z. Quant à la dilatation ∂_0, elle exprime

l'*extension* qu'a reçue, au point où elle perce cette section, la fibre dont un élément a été pris pour axe des x.

8. Bornons-nous actuellement aux modes d'équilibre qu'on peut considérer comme une première approximation de ceux que comporte un tronçon de tige, ou pour lesquels les relations (9) sont vérifiées. Nous aurons $\frac{dN_1}{dx} = 0$; par suite, les trois fonctions de x, appelées ∂_0, $\frac{d^2 v_0}{dx^2}$, $\frac{d^2 w_0}{dx^2}$, que contient l'expression (19) de N_1, se réduiront à des constantes. Les déformations transversales ∂_y, ∂_z, g_{yz} des sections normales seront également indépendantes de x, et les deux de ces sections qui correspondent aux abscisses x, $x + dx$ n'auront éprouvé, en projection sur un plan normal à l'élément de fibre, supposé pris pour axe des x, qui les joint, d'autre déplacement l'une par rapport à l'autre qu'une rotation infiniment petite θdx de la seconde devant la première, autour de la projection de l'élément considéré de fibre. Les petits déplacements transversaux des points de la seconde de ces sections dépasseront donc ceux, v, w, des points pareils de la première, de quantités réductibles à $-z\theta\, dx$, $y\theta\, dx$; en sorte qu'on aura, pour cette abscisse particulière x, $\frac{dv}{dx} = -\theta z$, $\frac{dw}{dx} = \theta y$, et que les deux déformations g_{xy}, g_{zx}, qui sont encore à déterminer, admettront pour expressions, sur cette section particulière d'abscisse x,

$$(21) \qquad g_{xy} = \frac{du}{dy} - \theta z, \quad g_{zx} = \frac{du}{dz} + \theta y.$$

Il ne restera donc qu'à évaluer les variations de u, aux divers points de la section *considérée*, pour que le calcul de toutes les déformations ∂, g éprouvées par le prisme et des pressions correspondantes N, T soit ramené à celui des quatre constantes ∂_0, $\frac{d^2 v_0}{dx^2}$, $\frac{d^2 w_0}{dx^2}$, θ.

A cet effet, on portera dans la première équation indéfinie (1), devenue

$$(22) \qquad \frac{dT_3}{dy} + \frac{dT_2}{dz} = 0,$$

ainsi que dans la première condition (2), $T_3 \cos\alpha + T_2 \sin\alpha = 0$, spé-

ciale au contour, et dans la condition analogue concernant les surfaces sur lesquelles la constitution de la matière changerait brusquement dans les sens transversaux, les expressions de T_3, T_2, en fonction de g_{xy}, g_{zx}, résultant des deux dernières équations (4); puis on substituera aux déformations g_{xy}, g_{zx} leurs valeurs (21). Toutes ces équations ne contiendront plus alors d'autre fonction inconnue que le déplacement longitudinal u, continu en tous les points de la section considérée σ, et elles le détermineront complétement en y, z si θ est supposé donné.

9. Avant de démontrer qu'il en est bien ainsi, établissons une relation qui nous sera utile. Multiplions (22) par $U d\sigma$, U désignant une fonction continue quelconque de y, z, et intégrons les résultats dans toute l'étendue de la section σ, après avoir remplacé $U\left(\frac{dT_3}{dy}+\frac{dT_2}{dz}\right)$ par $\frac{dUT_3}{dy}+\frac{dUT_2}{dz}-T_3\frac{dU}{dy}-T_2\frac{dU}{dz}$.

Le procédé employé pour obtenir la formule (14) donnera

$$\int_\sigma \left(T_3\frac{dU}{dy}+T_2\frac{dU}{dz}\right)d\sigma = 0. \tag{23}$$

Prenons d'abord soit $U = y$, soit $U = z$. Il vient

$$\int_\sigma T_3 d\sigma = 0, \quad \int_\sigma T_2 d\sigma = 0; \tag{24}$$

ce qui prouve que les composantes tangentielles $T_3 d\sigma$, $T_2 d\sigma$, suivant les y et suivant les z, des pressions exercées sur les divers éléments $d\sigma$ d'une section normale ont leurs sommes respectives nulles. Ainsi, *ces forces tangentielles équivalent en tout à un simple couple.*

Si nous posons actuellement $U = u$, et que nous remplacions $\frac{du}{dy}$, $\frac{du}{dz}$ par leurs valeurs $g_{xy}+\theta z$, $g_{zx}-\theta y$ tirées de (21), la formule (23) donne

$$\int_\sigma (T_3 g_{xy}+T_2 g_{zx})d\sigma = \theta\int_\sigma (yT_2 - zT_3)d\sigma. \tag{25}$$

Le premier membre de celle-ci est essentiellement positif, car

$$T_3 g_{xy} + T_2 g_{zx}$$

constitue la seconde partie distincte de l'expression positive (5), dont la première partie, déjà considérée, n'est autre que (6); quant au second membre, il est le produit de la quantité θ par le moment total, $M_x = \int_\sigma (yT_2 - zT_3)d\sigma$, du couple résultant de toutes les forces $T_3 d\sigma$. $T_2 d\sigma$.

Démontrons maintenant que la valeur de u sur la section considérée σ, d'abscisse x, est bien déterminée en fonction de y, z, à part une constante, qui s'annulera même si l'origine des coordonnées est, par exemple, prise et maintenue sur cette section σ. La forme, linéaire par rapport à u et à θ (sans terme indépendant), des relations (21), (22) et des diverses conditions spéciales qu'on leur joint montre que, si une certaine valeur de u les vérifie, et qu'on y remplace partout u par $u + u'$, la fonction u' seule les vérifiera aussi dans l'hypothèse $\theta = 0$. Par conséquent, appelons g'_{xy}, g'_{xz}, T'_3, T'_2 ce que deviennent g_{xy}, g_{zx}, T_3, T_2 lorsqu'on y pose $\theta = 0$, $u = u'$, et la formule (25) deviendra

$$\int_\sigma (T'_3 g'_{xy} + T'_2 g'_{zx})d\sigma = 0;$$

ce qui entraîne forcément, pour tous les points du prisme, les relations $g'_{xy} = 0$, $g'_{xz} = 0$. Or les formules (21) donnent $g'_{xy} = \frac{du'}{dy}$, $g'_{xz} = \frac{du'}{dz}$, en sorte que u' a bien ses dérivées en y, z nulles ou se réduit à une constante pour toute la section considérée.

10. L'équation (22) et les conditions, spéciales aux surfaces limites, qu'on lui adjoint ne contiennent que le rapport $\frac{u}{\theta}$ lorsqu'on les divise par θ. Par suite, les valeurs de u, celles de g_{xy}, g_{zx}, T_3, T_2 aux divers points, ainsi que le moment $M_x = \int_\sigma (yT_2 - zT_3)d\sigma$ du couple résultant, sont simplement proportionnelles à θ; et le nombre θ est le même pour les sections normales successives du prisme, comme le sont, par hypothèse, les forces T_3, T_2. L'intégration de ce système d'équations (22), etc., pour chaque forme de section, permettra d'obtenir le moment du couple,

$$(26) \qquad M_x = \int_\sigma (yT_2 - zT_3)d\sigma,$$

quand on connaîtra l'angle θdx dont tourne, dans le sens de Oy vers Oz, par rapport à la section normale d'abscisse primitive x et autour d'un élément de fibre longitudinale émanant de la section pris pour axe des x, une seconde section normale située à la distance primitive dx de la première. Le rapport θ de l'angle θdx à la distance correspondante dx mesure ce qu'on appelle la *torsion* du prisme par unité de longueur; M_x est dit *moment* ou *couple de torsion*.

Les équations différentielles dont il s'agit, (21), (22), etc., ne cessent pas d'être satisfaites quand on y multiplie y, z, dy, dz par un rapport constant de similitude a, pourvu qu'on multiplie en même temps u par a^2, g_{xy}, g_{xz}, T_3, T_2 par a, et, en conséquence,

$$M_x = \int (yT_2 - zT_3)\,dy\,dz$$

par la quantité a^4, proportionnelle à σ^2. Ainsi, pour tous les prismes ayant leurs sections normales semblables et pareillement constitués aux points homologues, le moment de torsion M_x est en raison directe du produit de la torsion θ par le carré de l'aire σ de la section. Si l'on appelle c une constante dépendant de la forme de la section et d'autant plus grande que les coefficients d'élasticité de glissement de la matière du prisme sont eux-mêmes plus grands, on aura

$$(27) \qquad M_x = c\theta\sigma^2.$$

L'intégration donnant T_3, T_2, M_x s'effectue le plus simplement possible, surtout quand la tige est homogène, par une méthode exposée aux §§ V et IX de mon Mémoire de 1871 *Sur les tiges*. Cette méthode montre l'extrême analogie qui existe entre les lois de la torsion et celles de l'écoulement bien continu d'un liquide dans un tube dont la paroi est mouillée par le liquide.

11. Si les composantes tangentielles $T_3 d\sigma$, $T_2 d\sigma$ de la pression appliquée aux divers points d'une section normale σ du prisme équivalent en tout à un couple parallèle à la section et ayant pour moment $c\theta\sigma^2$, il est encore plus facile d'exprimer simplement la valeur statique totale des composantes normales $N_1 d\sigma$. Supposons que la fibre longitudinale dont un élément est pris pour axe des x soit celle

qui joint les centres de gravité des sections, centres déterminés en attribuant à chaque élément $d\sigma$ de celles-ci une masse fictive égale au produit de cet élément $d\sigma$ par le coefficient d'élasticité E de la fibre qui y passe, et concevons de plus que les axes des y et des z soient choisis, dans le plan primitif d'une section, suivant les deux axes d'inertie principaux de celle-ci. Nous aurons, par hypothèse,

$$(28)\qquad \int_\sigma \mathrm{E} y\, d\sigma = 0, \quad \int_\sigma \mathrm{E} z\, d\sigma = 0, \quad \int_\sigma \mathrm{E} yz\, d\sigma = 0.$$

Appelons, en outre, E' la valeur moyenne

$$(29)\qquad \mathrm{E}' = \int_\sigma \mathrm{E} \frac{d\sigma}{\sigma}$$

du coefficient d'élasticité E des diverses fibres, $\mathrm{E}'\mathrm{I}_y$, $\mathrm{E}'\mathrm{I}_z$ les deux moments d'inertie principaux de la section

$$(29\ bis)\qquad \mathrm{E}'\mathrm{I}_y = \int_\sigma \mathrm{E} z^2\, d\sigma, \quad \mathrm{E}'\mathrm{I}_z = \int_\sigma \mathrm{E} y^2\, d\sigma$$

par rapport à l'axe des y et à celui des z. La formule (19), qu'on peut écrire

$$\mathrm{N}_1\, d\sigma = \mathrm{E}\partial_0\, d\sigma - \mathrm{E}\left(\frac{d^2 v_0}{dx^2} y + \frac{d^2 w_0}{dx^2} z\right) d\sigma,$$

montre que les tractions $\mathrm{N}_1\, d\sigma$ se composent : 1° d'une partie $\mathrm{E}\partial_0\, d\sigma$, ayant pour résultante une traction totale $\mathfrak{N} = \mathrm{E}'\sigma\partial_0$ appliquée au centre de gravité de la section ; 2° d'une seconde partie

$$-\mathrm{E}\left(\frac{d^2 v_0}{dx^2} y + \frac{d^2 w_0}{dx^2} z\right) d\sigma,$$

dont la somme totale pour les divers éléments $d\sigma$ est nulle à cause des deux premières relations (28), et qui équivaut par suite à un couple perpendiculaire à la section σ. Celui-ci peut lui-même se décomposer en deux couples : l'un, perpendiculaire à l'axe des y, a son moment, compté positivement en tournant dans le sens de Ox vers Oz, égal à

$$\mathrm{M}_y = \int_\sigma \mathrm{E}\left(\frac{d^2 v_0}{dx^2} y + \frac{d^2 w_0}{dx^2} z\right) z\, d\sigma;$$

l'autre, perpendiculaire à l'axe des z, a de même pour moment, compté positivement en tournant de Ox vers Oy,

$$M_z = \int_\sigma E\left(\frac{d^2 v_0}{dx^2} y + \frac{d^2 w_0}{dx^2} z\right) y\,d\sigma.$$

Grâce aux formules (28), (29 *bis*), ces expressions se réduisent respectivement à $E' I_y \frac{d^2 w_0}{dx^2}$, $E' I_z \frac{d^2 v_0}{dx^2}$.

En résumé, *les quatre constantes* $\partial_0, \theta, \frac{d^2 w_0}{dx^2}, \frac{d^2 v_0}{dx^2}$, *qui définissent complètement le mode d'équilibre du prisme, se détermineront au moyen des quatre équations*

$$(30)\quad \mathfrak{N} = E'\sigma\partial_0, \quad M_x = c\sigma^2\theta, \quad M_y = E' I_y \frac{d^2 w_0}{dx^2}, \quad M_z = E' I_z \frac{d^2 v_0}{dx^2},$$

si l'on connaît la valeur statique totale des forces appliquées à une section normale σ *du prisme. Celles-ci équivalent effectivement à une traction normale* $\mathfrak{N}$, *appliquée au centre de gravité de la section, et à trois couples* M_x, M_y, M_z *qui sont, le premier parallèle à la section, les deux autres, perpendiculaires respectivement à ses deux axes d'inertie principaux relatifs à son centre de gravité. La traction* $\mathfrak{N}$ *produit l'extension* ∂_0; *les deux derniers couples* M_y, M_z *produisent respectivement les deux flexions* $\frac{d^2 w_0}{dx^2}$, $\frac{d^2 v_0}{dx^2}$, *dans leurs plans respectifs; enfin le couple* M_x, *résultant des composantes tangentielles des actions que supporte la section normale, produit la torsion* θ.

12. On peut observer (toujours quand on se tient à la première approximation ou à la supposition $\frac{dN_1}{dx} = 0$ partout) que, d'une part, *les petites inclinaisons* g_{xy}, g_{xz} *prises par les fibres longitudinales par rapport aux sections,* d'autre part, *le gauchissement que celles-ci éprouvent* et que mesurent les valeurs de u entrant dans les formules (21), (22), etc., *tiennent uniquement à la torsion* θ *ou à l'existence du couple* M_x. Quand il n'y a qu'extension et flexion, sans torsion, ces équations (à la même approximation ou supposition) donnent, sur la section quelconque d'où part l'élément de fibre longitudinale pris pour axe des x, $g_{xy} = 0$, $g_{zx} = 0$, $u = 0$; les sections normales restent donc

alors sensiblement planes et perpendiculaires aux fibres, qui ne cessent pas elles-mêmes d'être parallèles entre elles.

A l'inverse, ni les déformations latérales ∂_y, ∂_z, g_{yz}, ni la dilatation longitudinale ∂_x, ne dépendent du moment M_x; par conséquent, *la torsion modifie la forme de la section considérée, primitivement normale à l'axe du prisme, sans changer la forme de sa projection sur un plan perpendiculaire à l'élément de fibre longitudinale qui en émane et qu'on a choisi pour axe des x*. Toutes les droites qui joignent deux à deux les points de la section, se projetant sur ce plan sous des angles très-petits, ne diffèrent de leurs projections que par des quantités négligeables du second ordre de petitesse; en sorte que des lignes quelconques, tracées sur la section normale proposée, ont mêmes longueurs et se coupent par suite sous les mêmes angles que leurs projections, qui ne dépendent pas de la grandeur du couple de torsion M_x.

Il en est évidemment de même pour toutes les projections de la section primitivement normale σ sur des plans faisant avec elle de petits angles; d'où il suit que ces projections planes sont des figures égales entre elles. D'ailleurs, une quelconque de ces figures, vue en projection sur le plan d'une autre, sera orientée de la même manière que celle-ci; car, si l'on considère un élément rectiligne de la première, l'angle très-petit de cet élément rectiligne et de l'élément correspondant de σ dont il est une projection sera vu presque de profil, ou en raccourci, sur le plan de la seconde, et paraîtra ainsi du deuxième ordre de petitesse ou aura ses côtés sensiblement parallèles. Il revient donc au même, quant à la forme et à l'orientation des figures obtenues, de projeter sur un des plans la section σ ou bien une quelconque de ses projections considérées.

Si l'on projette, par exemple, les deux sections qui ont pour abscisses primitives x, $x + dx$, non plus sur un plan perpendiculaire à l'élément de fibre dx, mais sur un plan perpendiculaire à un autre élément de fibre longitudinale mené entre les deux mêmes sections, les nouvelles projections ne différeront que par de simples translations de celles qu'on aura en projetant sur ce second plan les projections déjà obtenues sur le premier. Or, celles-ci se projetteront évidemment en vraie grandeur sur le deuxième plan, sauf erreurs négligeables du second ordre de petitesse, et donneront deux figures, dont la seconde

ne différera de la première que par une rotation θdx autour d'un de ses points. Il ne restera plus, pour avoir les projections cherchées des deux sections sur le second plan, qu'à amener, par deux simples translations de ces deux figures, les points qui représentent ceux où l'élément de la nouvelle fibre considérée perce les sections à coïncider avec la projection même de cet élément de fibre. L'orientation des deux figures n'étant pas changée par des translations, la seconde ne différera finalement de la première que par une rotation θdx autour de l'élément de la nouvelle fibre considérée. Ainsi, *la rotation relative des sections, qui mesure la torsion du prisme, est la même quelle que soit la fibre longitudinale dont on prend l'élément pour axe de repère, ou dont le plan normal est, en chaque endroit, celui sur lequel on projette deux sections consécutives.* C'est d'ailleurs ce qui résultait de l'équation (25), qui donne à θ une valeur indépendante du choix de cette fibre.

Dans son Mémoire sur la torsion des prismes, M. de Saint-Venant avait déjà reconnu ce fait, qui permet de considérer la torsion d'un tronçon de tige comme se produisant autour d'une fibre quelconque.

III. — Application a la théorie des tiges.

13. Le mode d'équilibre étudié aux numéros précédents (**8** à **12**) ne convient *en toute rigueur* à un tronçon d'une tige qu'autant que celle-ci est d'une longueur infinie, prismatique et homogène dans le sens de la longueur, peu écartée de sa forme d'état naturel, libre enfin de toute action extérieure qui serait appliquée à sa surface latérale ou à sa masse. Il est évident en effet que, dans un tel cas, l'hypothèse d'une distribution égale des pressions aux points homologues de toutes les sections normales σ d'un tronçon serait pleinement réalisée. Par suite, les fibres longitudinales n'y exercent les unes sur les autres, comme on a vu, que des actions parallèles à ces fibres mêmes, et elles éprouvent des dilatations ∂_x variant linéairement dans les sens transversaux. L'action totale supportée par une section primitivement normale d'un tronçon se réduit :

1° A une *traction* $\mathfrak{N}$, appliquée à son centre de gravité, tangente à la fibre longitudinale *moyenne* qui joint tous les centres de

gravité pareils, valant enfin le produit de l'*extension* δ_0 de cette fibre par le coefficient moyen d'élasticité E' et par la section totale primitive σ;

2° A un *couple de torsion* M_x, perpendiculaire à la fibre moyenne et égal au produit d'une expression de la forme $c\sigma^2$ par l'*angle de torsion* θ, rapporté à l'unité de distance primitive, dont une section normale située à une petite distance dx de celle que l'on considère a tourné, par rapport à elle, autour de la même fibre moyenne, en ce sens que deux points matériels des deux sections qui se projetaient sur un même point d'un plan perpendiculaire à l'élément dx de fibre moyenne ou, sensiblement, à sa tangente s'y projettent, après les déformations, en deux points dont le second se déduit du premier par la rotation θdx autour de la tangente considérée;

3° A deux *couples de flexion* M_y, M_z, respectivement normaux à deux droites rectangulaires menées, perpendiculairement à la fibre moyenne et à partir du point où celle-ci perce la section, de manière que le plan de l'une d'elles et de la tangente à la fibre moyenne touche la ligne matérielle qui représente à l'état naturel un des deux axes d'inertie principaux de la section relatifs à son centre de gravité; chacun de ces couples a pour valeur le produit du moment d'inertie correspondant $E'I_y$ ou $E'I_z$ de la section σ par la courbure (ou *flexion*) qu'a prise la projection, sur le plan même du couple, d'une ligne tangente à la fibre moyenne et primitivement droite.

Des forces quelconques s'exerçant sur la section σ équivaudraient en tout, dans le sens où l'on entend l'équivalence lorsqu'on s'occupe de la statique des systèmes invariables, à trois couples M_x, M_y, M_z, normaux aux trois droites rectangulaires ci-dessus considérées, dont la première est tangente à la fibre moyenne, et en outre à trois forces $\mathcal{N}$, $\mathcal{T}_y$, $\mathcal{T}_z$, dirigées respectivement suivant les trois mêmes droites, à partir de leur point d'intersection. On voit que la condition d'égale répartition des pressions le long d'une même fibre longitudinale d'un tronçon, ou la supposition (9), $\frac{d(N,T)}{dx} = 0$, du n° 4, a pour effet d'annuler les deux composantes $\mathcal{T}_y$, $\mathcal{T}_z$, et de donner à $\mathcal{N}$, M_x, M_y, M_z les valeurs simples que je viens d'indiquer.

Passons actuellement, conformément aux explications données au

§ I, du cas *limite* où la longueur est supposée infinie, la forme exactement prismatique à l'état naturel, la constitution parfaitement homogène dans le sens de la longueur, la surface latérale et l'intérieur libres de toute action extérieure, au cas *réel* d'une tige suffisamment longue, par rapport à sa largeur, pour que ces diverses conditions soient approximativement réalisées à l'intérieur de ses tronçons, notamment pour que l'état de la matière y varie beaucoup plus lentement dans le sens de la longueur que dans les sens transversaux.

A cause de la continuité, les expressions des forces ou couples $\mathfrak{N}$, M_x, M_y, M_z ne pourront pas différer notablement de ce qu'elles étaient dans le cas limite, et les deux composantes totales (ou *efforts tranchants*) $\mathfrak{F}_y$, $\mathfrak{F}_z$, qui s'annulaient dans ce cas limite, ne pourront avoir acquis, rapportées à l'unité superficielle de σ, que des valeurs insensibles par rapport aux plus grandes valeurs de N_1, ainsi qu'à celles de M_x, M_y, M_z divisées par $\sigma^{\frac{3}{2}}$. De même, la dilatation ∂_x des fibres sera restée sensiblement une fonction linéaire des coordonnées transversales, et l'action mutuelle de deux fibres aura ses composantes transversales insensibles en comparaison de sa composante longitudinale.

14. Les diverses sections normales σ de la tige seront définies en position par une abscisse s, mesurée le long même de la fibre moyenne dans son état naturel et à partir d'une extrémité. Cette fibre pourra être primitivement courbe, et alors on donnera, au point où elle perce la section σ, d'abscisse s, les courbures primitives $\frac{1}{R_y^0}$, $\frac{1}{R_z^0}$ de ses deux projections sur les plans menés par cette fibre et par les deux axes principaux d'inertie Oy, Oz de la section. On devra connaître en outre, pour toutes les valeurs de s, l'angle $\alpha_0 ds$ que fait primitivement avec l'axe d'inertie Oy de la section σ, d'abscisse s, la projection sur cette section de l'axe d'inertie analogue de la section suivante, dont l'abscisse primitive est $s + ds$. La tige est dite *torse* quand on n'a pas $\alpha_0 = 0$.

Avec ces données, on pourra évidemment, dans l'état primitif, connaissant les directions Ox, Oy, Oz d'un élément ds de la fibre moyenne et des axes d'inertie principaux de la section σ, d'abscisse s, d'où part l'élément ds, construire les directions analogues pour la section suivante d'abscisse $s + ds$, ainsi que pour l'élément suivant de la fibre

moyenne, et déterminer de proche en proche, soit la position Ox des divers éléments de la fibre moyenne, soit celles, Oy, Oz, des axes d'inertie principaux des sections successives. C'est à ces axes locaux Ox, Oy, Oz qu'on rapportera, avant et après les déformations, les parties de la tige qui en seront voisines : nous conviendrons de laisser l'axe Ox constamment tangent à l'élément ds de fibre moyenne (avec son origine O sur la section σ), et les axes perpendiculaires Oy, Oz orientés de manière que le plan xOy soit toujours, à l'origine, tangent à la ligne matérielle qui représentait l'axe des y dans l'état primitif.

Après les déplacements, l'élément ds de la fibre moyenne sera devenu $(1+\partial_0)ds$. De plus, l'angle que fera, avec l'axe Oy émané de la première extrémité de cet élément, la projection, sur le plan yOz, de l'axe analogue émané de la seconde extrémité, aura une certaine valeur, αds, qui dépassera sa valeur primitive $\alpha_0 ds$ de la torsion θds éprouvée le long de l'élément. En effet, l'inclinaison primitive, $\alpha_0 ds$ (en projection sur yOz), d'un axe principal d'inertie de la section d'abscisse $s+ds$ sur une ligne matérielle menée aussi à partir de la seconde extrémité de l'élément ds, mais primitivement parallèle à l'axe d'inertie correspondant de la section d'abscisse s, n'aura pas varié sensiblement par suite des petites déformations produites; et sa projection sur le plan yOz, restée à fort peu près $\alpha_0 ds$, devra être ajoutée à l'angle θds dont aura tourné la projection sur le plan yOz de la tangente à cette ligne matérielle, pour donner, très-sensiblement, l'angle total formé, après les déplacements, par Oy et par la projection sur yOz de l'axe analogue relatif à la section suivante. Sans doute, ce dernier axe local des y ne se confond plus avec ce qu'est devenu l'axe d'inertie correspondant de la section d'abscisse $s+ds$. Mais leur petit angle mutuel, de l'ordre des ∂, g, se projette sur yOz sous un angle presque droit, même quand la distance ds des deux sections devient la longueur d'un tronçon ou est comparable aux dimensions transversales de la tige; la projection de ce petit angle se trouve donc du second ordre de petitesse, c'est-à-dire négligeable devant θds, $\alpha_0 ds$, et l'angle de torsion totale αds est à fort peu près le même que si le second axe local des y restait tangent à la transformée de l'axe d'inertie voisin.

Considérons de même deux tangentes menées, en deux points dont la distance ne soit qu'un infiniment petit du second ordre, l'une à la

seconde extrémité de l'élément ds de la fibre moyenne, l'autre à la ligne matérielle qui était primitivement droite et tangente à la première extrémité de l'élément ds. L'angle des deux tangentes ainsi menées et la direction, par rapport aux axes Ox, Oy, Oz, de leur perpendiculaire commune, ne sont évidemment changées par les déformations que de quantités relativement fort petites; en sorte que les deux tangentes dont il s'agit ne cessent pas de faire, en projection sur le plan des xy, l'angle $\frac{ds}{R_y^0}$, et, en projection sur le plan des xz, l'angle $\frac{ds}{R_z^0}$. Il faut évidemment ajouter ces deux angles aux angles correspondants de contingence, $\frac{d^2 v_0}{dx^2} ds$, $\frac{d^2 w_0}{dx^2} ds$, de la ligne primitivement droite, pour obtenir les angles de contingence, en projection sur les plans respectifs xOy, xOz, de la fibre moyenne elle-même après les déformations. Ces angles seront à fort peu près $\frac{ds}{R_y}$, $\frac{ds}{R_z}$ si $\frac{1}{R_y}$, $\frac{1}{R_z}$ désignent alors les courbures des deux projections de la fibre moyenne sur les plans xOy, xOz.

Les fonctions appelées α, R_y, R_z, une fois déterminées, serviront à construire de proche en proche, après les déformations et concurremment avec ∂_0, la fibre moyenne ainsi que les directions Oy, Oz, indicatrices des axes principaux d'inertie des diverses sections normales, absolument comme α_0, R_y^0, R_z^0 permettaient d'effectuer la construction analogue avant les déformations. On vient de voir que ces fonctions sont liées aux quantités θ, $\frac{d^2 v_0}{dx^2}$, $\frac{d^2 w_0}{dx^2}$ au moyen des relations simples

$$(31) \qquad \theta = \alpha - \alpha_0, \quad \frac{d^2 v_0}{dx^2} = \frac{1}{R_y} - \frac{1}{R_y^0}, \quad \frac{d^2 w_0}{dx^2} = \frac{1}{R_z} - \frac{1}{R_z^0}.$$

Les formules (30) s'écriront, par suite,

$$(32) \qquad \begin{cases} \mathfrak{N} = E'\sigma\partial_0, \\ M_x = c\sigma^2(\alpha - \alpha_0), \\ M_y = E'I_y\left(\frac{1}{R_z} - \frac{1}{R_z^0}\right), \\ M_z = E'I_z\left(\frac{1}{R_y} - \frac{1}{R_y^0}\right). \end{cases}$$

15. Les principes des quantités de mouvement et des moments, si on les applique à toute la portion de tige comprise au delà de la section σ, d'abscisse quelconque s, montrent que la traction normale $\mathfrak{N}$ est égale à la somme des composantes, dans le sens de l'élément suivant ds de la fibre moyenne ou dans le sens Ox de toutes les forces extérieures exercées sur cette portion de tige, et que les couples M_x, M_y, M_z sont égaux respectivement aux sommes des moments de ces forces par rapport aux axes Ox, Oy, Oz. Les formules (32), en y remplaçant $\mathfrak{N}$, M_x, M_y, M_z par ces valeurs, deviennent quatre relations pouvant servir à déterminer les quatre fonctions inconnues ∂_0, α, R_z, R_y : ce sont les quatre équations d'équilibre de la tige. Les formules (31) donneront ensuite, pour chaque valeur de s, les trois paramètres θ, $\frac{d^2 v_0}{dx^2}$, $\frac{d^2 w_0}{dx^2}$, qui, joints à ∂_0, détermineront, sauf erreurs relatives négligeables, les déformations ∂, g éprouvées par la matière de la tige en ses divers points. Enfin, les deux petites composantes totales $\mathcal{F}_y$, $\mathcal{F}_z$, suivant Oy, Oz, des pressions exercées à travers la section σ pourront être également connues; car, d'après le principe des quantités de mouvement, chacune d'elles sera égale à la somme des composantes, suivant Oy ou suivant Oz, des forces extérieures appliquées à la portion considérée de tige.

Les quatre équations d'équilibre présentées ainsi sous la forme (32) ont généralement pour premiers membres des intégrales, et il faut une ou plusieurs différentiations pour en déduire les équations d'équilibre d'un simple tronçon, compris entre les deux sections normales infiniment voisines dont les abscisses primitives étaient s, $s + ds$. Or on peut former aisément ces équations d'équilibre en appliquant au tronçon les principes des quantités de mouvement et des moments par rapport aux axes locaux Ox, Oy, Oz.

En effet, la première base σ du tronçon supporte les trois forces $-\mathfrak{N}$, $-\mathcal{F}_y$, $-\mathcal{F}_z$ et les trois couples $-M_x$, $-M_y$, $-M_z$; la seconde est soumise à trois forces et à trois couples analogues, mais changés de signe, augmentés de leurs différentielles par rapport à s, et parallèles ou perpendiculaires à trois directions, infiniment peu différentes de Ox, Oy, Oz, facilement déterminables au moyen des angles de contingence et de torsion $\frac{ds}{R_y}$, $\frac{ds}{R_z}$, αds. Par exemple, les projections de la

force $\mathfrak{M} + \frac{d\mathfrak{M}}{ds} ds$ sur les plans xOy et xOz font avec Ox, du côté de Oy ou de Oz, les angles infiniment petits $\frac{ds}{R_y}$, $\frac{ds}{R_z}$; ce qui revient à dire que les cosinus des angles que cette force fait avec Ox et Oy, avec Ox et Oz, sont respectivement entre eux comme 1 est à $\frac{ds}{R_y}$, comme 1 est à $\frac{ds}{R_z}$, ou qu'ils valent $1, \frac{ds}{R_y}, \frac{ds}{R_z}$. Enfin, certaines forces extérieures seront appliquées à la surface latérale du tronçon ou à sa masse : j'appellerai ρ la densité moyenne primitive du tronçon, dont la masse vaudra par suite $\rho\sigma ds$, et je désignerai par $\rho X\sigma ds$, $\rho Y\sigma ds$, $\rho Z\sigma ds$ les composantes totales des actions extérieures dont il s'agit. Quant à leurs moments par rapport à Oy, Oz, les deux forces $\rho Y\sigma ds$, $\rho Z\sigma ds$, dont les bras de levier seront comparables à ds, n'en donneront que de négligeables, et ceux de $\rho X\sigma ds$ seront en général insensibles, surtout si les composantes longitudinales de l'action extérieure ne sont pas distribuées trop inégalement de part et d'autre du centre de gravité des sections. L'autre axe Ox étant parallèle à la force $\rho X\sigma ds$, il y aura seulement à compter le moment des actions extérieures transversales par rapport à l'axe Ox ou à l'élément ds de fibre moyenne : j'appellerai $\mu\rho\sigma^{\frac{3}{2}} ds$ ce moment, dont $\mu\sqrt{\sigma}$ sera, en quelque sorte, la valeur par unité de masse, valeur comparable à la force qui le produit multipliée par un bras de levier de l'ordre des dimensions transversales de la tige ou de l'ordre de $\sqrt{\sigma}$.

Il suffira d'exprimer que ces diverses forces ou couples se font équilibre sur le tronçon, puis de remplacer $\mathfrak{M}$, M_x, M_y, M_z par leurs expressions (32), pour avoir les équations différentielles cherchées de l'équilibre de la tige.

16. Bornons-nous aux deux cas particulièrement intéressants d'une tige primitivement droite et non torse, peu déformée, et d'une tige symétrique par rapport à un plan, soumise à l'action de forces symétriques par rapport à ce plan.

Dans le cas d'une tige rectiligne et non torse peu déformée, l'abscisse s deviendra une abscisse rectiligne x; on aura $\alpha_0 = 0$, $\frac{1}{R_y^0} = 0$, $\frac{1}{R_z^0} = 0$,

et les flexions ou torsion $\frac{1}{R_y}$, $\frac{1}{R_z}$, α seront assez petites pour qu'on puisse négliger leurs produits par M_x, M_y, M_z, en comparaison des dérivées $\frac{d}{dx}(M_x, M_y, M_z)$, ou leurs produits par $\mathfrak{F}_y$, $\mathfrak{F}_z$ en comparaison des $\frac{d(\mathfrak{N}, \mathfrak{F})}{dx}$. Mais nous conserverons les produits de $\frac{1}{R_y}$, $\frac{1}{R_z}$ par $\mathfrak{N}$ devant les dérivées $\frac{d}{dx}(\mathfrak{F}_y, \mathfrak{F}_z)$, lesquelles seront beaucoup plus petites que $\frac{dN_1}{dx}$: en effet, $\mathfrak{F}_y$, $\mathfrak{F}_z$ étant négligeables à une première approximation, leurs dérivées en x le sont même à une deuxième, contrairement à celles bien plus sensibles de $\mathfrak{N}$, M_x, M_y, M_z.

La force $\mathfrak{N} + \frac{d\mathfrak{N}}{dx}dx$, appliquée à la seconde extrémité de l'élément ds ou dx, et dont les angles avec Ox, Oy, Oz ont respectivement pour cosinus 1, $\frac{ds}{R_y}$, $\frac{ds}{R_z}$, donnera, sauf erreurs négligeables de l'ordre de ds^2 ou de dx^2, les composantes respectives

$$(33)\qquad \mathfrak{N} + \frac{d\mathfrak{N}}{dx}dx, \quad \frac{\mathfrak{N}}{R_y}dx, \quad \frac{\mathfrak{N}}{R_z}dx.$$

Ses moments seront d'ailleurs nuls, car cette force prolongée ne passe qu'à une distance comparable à ds^2 de l'origine O, c'est-à-dire de la première extrémité de l'élément ds.

Les petites forces $\mathfrak{F}_y + \frac{d\mathfrak{F}_y}{dx}dx$, $\mathfrak{F}_z + \frac{d\mathfrak{F}_z}{dx}dx$ font avec les axes Ox, Oy, Oz des angles dont les cosinus sont $0, 1, 0$ pour la première, $0, 0, 1$ pour la seconde, à part des erreurs de l'ordre de ds^2 sur les cosinus peu différents de 1, ou des erreurs, sur les cosinus voisins de zéro, de l'ordre de αdx, $\frac{dx}{R_y}$, $\frac{dx}{R_z}$, et ayant leurs produits par $\mathfrak{F}_y$, $\mathfrak{F}_z$ négligeables devant $\frac{d\mathfrak{F}_y}{dx}dx$, $\frac{d\mathfrak{F}_z}{dx}dx$. Ces forces ne fourniront donc pas d'autres composantes que $\mathfrak{F}_y + \frac{d\mathfrak{F}_y}{dx}dx$, suivant Oy, et $\mathfrak{F}_z + \frac{d\mathfrak{F}_z}{dx}dx$, suivant Oz. En outre, elles ne donnent que des moments négligeables, de l'ordre de ds^2, soit par rapport à Ox et à Oy pour la première, soit par rapport à Ox et à Oz pour la seconde, vu que, d'une part, leur distance à Ox est de l'ordre de ds^2, tandis que, d'autre part, leurs projections respec-

tives, sur des plans normaux à Oy et à Oz, se font sous des angles dont le cosinus est de l'ordre de ds, et sont à des distances de Oy et de Oz comparables à ds. Il n'y a donc à considérer que le moment de $\mathcal{F}_z + \frac{d\mathcal{F}_z}{dx}dx$ par rapport à Oy et le moment de $\mathcal{F}_y + \frac{d\mathcal{F}_y}{dx}dx$ par rapport à Oz : les bras de levier valant sensiblement ds ou dx, ces moments seront à fort peu près $\mathcal{F}_z dx$ et $\mathcal{F}_y dx$.

Enfin, les couples $M_x + \frac{dM_x}{dx}dx$, $M_y + \frac{dM_y}{dx}dx$, $M_z + \frac{dM_z}{dx}dx$, dont les plans sont normaux à trois directions, ne différant respectivement de Ox, Oy, Oz que par des angles comparables à $\frac{dx}{R_y}$, $\frac{dx}{R_z}$, αdx, ne donnent de moments sensibles, le premier, que par rapport à Ox, le second, que par rapport à Oy, le troisième, que par rapport à Oz.

Les équations fournies par le principe des quantités de mouvement seront, par suite,

$$-\mathcal{N} + \left(\mathcal{N} + \frac{d\mathcal{N}}{dx}dx\right) + \rho X\sigma dx = 0,$$

$$-\mathcal{F}_y + \left(\mathcal{F}_y + \frac{d\mathcal{F}_y}{dx}dx\right) + \frac{\mathcal{N}}{R_y}dx + \rho Y\sigma dx = 0,$$

$$-\mathcal{F}_z + \left(\mathcal{F}_z + \frac{d\mathcal{F}_z}{dx}dx\right) + \frac{\mathcal{N}}{R_z}dx + \rho Z\sigma dx = 0,$$

et l'on aura, pour celles des moments,

$$-M_x + \left(M_x + \frac{dM_x}{dx}dx\right) + \rho\mu\sigma^{\frac{3}{2}}dx = 0,$$

$$-M_y + \left(M_y + \frac{dM_y}{dx}dx\right) + \mathcal{F}_z dx = 0,$$

$$-M_z + \left(M_z + \frac{dM_z}{dx}dx\right) + \mathcal{F}_y dx = 0.$$

La première et la quatrième de ces équations reviennent à

$$(34) \qquad \frac{d\mathcal{N}}{dx} + \rho\sigma X = 0, \quad \frac{dM_x}{dx} + \rho\sigma^{\frac{3}{2}}\mu = 0.$$

Les quatre autres peuvent s'écrire

$$(35)\quad \begin{cases} \mathcal{F}_y = -\dfrac{dM_z}{dx}, \quad \mathcal{F}_z = -\dfrac{dM_y}{dx}, \\ \dfrac{d\mathcal{F}_y}{dx} + \dfrac{\mathfrak{T}}{R_y} + \rho\sigma Y = 0, \quad \dfrac{d\mathcal{F}_z}{dx} + \dfrac{\mathfrak{T}}{R_z} + \rho\sigma Z = 0. \end{cases}$$

Les deux premières de celles-ci montrent que les *efforts tranchants* $\mathcal{F}_y$, $\mathcal{F}_z$ égalent les dérivées premières en x, changées de signe, des moments fléchissants respectifs M_z, M_y.

En transportant ces valeurs de $\mathcal{F}_y$, $\mathcal{F}_z$ dans les deux dernières (35), il vient

$$(36)\quad -\frac{d^2M_z}{dx^2} + \frac{\mathfrak{T}}{R_y} + \rho\sigma Y = 0, \quad -\frac{d^2M_y}{dx^2} + \frac{\mathfrak{T}}{R_z} + \rho\sigma Z = 0.$$

Ce sont les deux équations qui régissent la *flexion*, tandis que les relations (34) régissent, l'une l'*extension* ou la *compression*, l'autre la *torsion*. Il ne reste plus qu'à y substituer à $\mathfrak{T}$, M_x, M_z, M_y leurs valeurs (32) et à δ_0, $\frac{1}{R_y}$, $\frac{1}{R_z}$ les expressions $\frac{du_0}{dx}$, $\frac{d^2v_0}{dx^2}$, $\frac{d^2w_0}{dx^2}$ fournies par (3) et (31).

Dans les deux formules (36) ou dans les deux dernières (35), les seconds termes, quoique non linéaires ou affectés à la fois de la petite courbure $\frac{1}{R_y}$, $\frac{1}{R_z}$ et de $\mathfrak{T}$, qui est de l'ordre de la petite dilatation δ_0, ne peuvent généralement pas être négligés, pour la raison donnée vers le commencement de ce numéro. De fait, ces termes, nuls lorsqu'il n'y a que flexion et torsion sans extension, sont au contraire beaucoup plus grands que $\frac{d\mathcal{F}_y}{dx}$, $\frac{d\mathcal{F}_z}{dx}$, quand la tige est tendue et que ses dimensions transversales se trouvent assez petites pour que les couples M_y, M_z, proportionnels aux moments principaux d'inertie de la section σ, deviennent comme des infiniment petits d'ordre supérieur en comparaison de $\mathfrak{T}$, qui est proportionnel à σ : alors la tige ne résiste presque à la flexion, produite soit statiquement par des forces transversales, soit par un mouvement vibratoire, qu'en raison de sa tension même $\mathfrak{T}$, et elle prend le nom de *fil* ou de *corde*.

17. Enfin, si la tige est symétrique et déformée symétriquement par

rapport à un plan, qu'on peut supposer choisi pour celui des xy, on aura $\alpha_0 = 0$, $\frac{1}{R_z^0} = 0$, $\alpha = 0$, $\frac{1}{R_z} = 0$, $\mathcal{F}_z = 0$, $Z = 0$, et l'on pourra n'appliquer le principe des quantités de mouvement à un tronçon que suivant les deux axes Ox, Oy, le principe des moments que par rapport à l'axe des z. Il n'y aura à changer aux considérations du numéro précédent que ce qui concerne, d'une part, les dérivées $\frac{d}{ds}$, qu'on ne pourra plus écrire $\frac{d}{dx}$, d'autre part, les composantes de la force $\mathcal{F}_y + \frac{d\mathcal{F}_y}{ds}ds$, dont les angles avec Ox et Oy seront $\frac{\pi}{2} + \frac{ds}{R_y}$, $\frac{ds}{R_y}$; ces composantes vaudront, par suite, sauf erreurs insensibles de l'ordre de ds^2, $-\frac{\mathcal{F}_y}{R_y}ds$, $\mathcal{F}_y + \frac{d\mathcal{F}_y}{ds}ds$. La première ne sera plus négligeable, car la courbure $\frac{1}{R_y}$ pourra être beaucoup plus grande que dans le cas précédent.

Les équations (34) seront donc remplacées par celle-ci

(37) $$\frac{d\mathfrak{N}}{ds} - \frac{\mathcal{F}_y}{R_y} + \rho\sigma X = 0,$$

et les relations (35) par la première et la troisième seulement, savoir :

(38) $$\mathcal{F}_y = -\frac{dM_z}{ds}, \quad \frac{d\mathcal{F}_y}{ds} + \frac{\mathfrak{N}}{R_y} + \rho\sigma Y = 0.$$

Ces dernières donnent, pour seconde équation de l'équilibre,

(39) $$-\frac{d^2 M_z}{ds^2} + \frac{\mathfrak{N}}{R_y} + \rho\sigma Y = 0,$$

tandis que la première (37) devient

(39 *bis*) $$\frac{d\mathfrak{N}}{ds} + \frac{1}{R_y}\frac{dM_z}{ds} + \rho\sigma X = 0.$$

Il ne reste plus qu'à substituer, dans ces équations, à $\mathfrak{N}$, M_z leurs valeurs (32) :

(40) $$\mathfrak{N} = E'\sigma\partial_0, \quad M_z = E'I_z\left(\frac{1}{R_y} - \frac{1}{R_y^0}\right).$$

On remarquera que la traction normale $\mathfrak{N}$ et le couple de flexion M_z entrent à la fois dans chacune des deux équations indéfinies (39) et (39 *bis*), en sorte qu'on ne peut annuler aucune des deux quantités ∂_0, $\frac{1}{\mathrm{R}_y} - \frac{1}{\mathrm{R}_y^0}$ sans astreindre l'autre à vérifier deux équations indéfinies distinctes, généralement incompatibles. Aussi des vibrations longitudinales et des vibrations transversales ne peuvent-elles pas se produire séparément dans une tige circulaire, comme l'a démontré M. Resal à la page 153 du Tome II de son *Traité de Mécanique générale*.

18. La première formule (38) ne fait connaître que la résultante $\mathfrak{F}_y$ des actions tangentielles exercées sur toute la section normale σ. Quant à ces actions tangentielles elles-mêmes, qui étaient, comme $\mathfrak{F}_y$, insensibles à une première approximation, une intégration effectuable pour certaines formes de la section permet de les déterminer, du moins quand la tige est prismatique, symétriquement constituée par rapport au plan des xy, modérément fléchie, et qu'elle a sa surface latérale libre de toute action extérieure. Supposons, pour simplifier, que toutes les fibres aient le même coefficient d'élasticité E, indépendant de x comme σ, et que la composante longitudinale de l'action extérieure exercée sur l'unité de volume du tronçon ne diffère pas sensiblement de sa moyenne $\rho\mathrm{X}$; cette moyenne vaudra

$$(40\ bis)\qquad \rho\mathrm{X} = -\frac{1}{\sigma}\frac{d\mathfrak{N}}{dx} = -\mathrm{E}\frac{d\partial_0}{dx},$$

d'après l'équation (37), dans laquelle on pourra négliger le second terme (vu la petitesse supposée de la courbure), remplacer E' par E et $\frac{d}{ds}$ par $\frac{d}{dx}$. Les formules des n°s 5, 6 et 7 seront applicables même à une deuxieme approximation, d'après ce que l'on a vu à la fin du n° 4. La relation (19), réduite à

$$\mathrm{N}_1 = \mathrm{E}\left(\partial_0 - y\frac{d^2 v_0}{dx^2}\right) = \mathrm{E}\partial_0 - \frac{y}{\mathrm{I}_z}\mathrm{M}_z,$$

donnera par sa différentiation par rapport à x, en tenant compte de (40 *bis*),

$$\frac{d\mathrm{N}_1}{dx} = \mathrm{E}\frac{d\partial_0}{dx} - \frac{y}{\mathrm{I}_z}\frac{d\mathrm{M}_z}{dx} = -\rho\mathrm{X} - \frac{y}{\mathrm{I}_z}\frac{d\mathrm{M}_z}{ds}.$$

La première équation de l'équilibre d'un élément de volume infiniment petit

$$\frac{dT_3}{dy} + \frac{dT_2}{dz} = -\frac{dN_1}{dx} - \rho X$$

deviendra donc

$$(41)\qquad \frac{dT_3}{dy} + \frac{dT_2}{dz} = \frac{y}{I_z}\frac{dM_z}{ds}.$$

Combinée avec la première condition spéciale (2), elle détermine complétement, après qu'on a remplacé T_3, T_2 par les valeurs tirées des deux dernières (4) et g_{zx}, g_{xy} par leurs expressions (3), le très-petit déplacement longitudinal u, caractéristique du gauchissement éprouvé par la section σ. On le reconnaîtrait en raisonnant comme au n° 9, sauf à attribuer à $\frac{dv}{dx}$, $\frac{dw}{dx}$ des valeurs différentes données par l'intégration du système (20), et à observer qu'on a ici, par raison de symétrie, $\vartheta = 0$. Les trois coefficients H, H', η'' des formules (4) seraient d'ailleurs nuls, à cause de la symétrie de contexture supposée par rapport au plan des xy. On trouverait, pour tenir lieu de la formule (23),

$$(42)\qquad \int_\sigma\left(T_3\frac{dU}{dy} + T_2\frac{dU}{dz}\right)d\sigma = -\frac{dM_z}{ds}\frac{\int_\sigma y\,U\,d\sigma}{I_z}.$$

En y faisant $U = y$, il vient bien, comme il le fallait,

$$\int_\sigma T_3\,d\sigma \quad \text{ou} \quad \mathcal{F}_y = -\frac{dM_z}{ds} \quad [*].$$

La méthode indiquée ici pour déterminer T_3, T_2 s'étendrait à tous les

---

[*] Avant de passer à l'étude des plaques, je reviendrai un instant sur les principes fondamentaux de la théorie des tiges, principes exprimés par les formules (12) et (18), que M. de Saint-Venant s'était données comme point de départ, mais que je pense avoir démontrées le premier, et qui signifient que *les fibres longitudinales éprouvent des dilatations variables linéairement aux divers points d'une même section et n'exercent les unes sur les autres que des actions dirigées suivant leurs tangentes*. Je ferai observer que ces lois subsisteraient sans qu'on fît l'hypothèse de la symétrie de contexture de la tige par rapport aux sections normales, si l'on admettait, par contre, la

cas où ces forces tangentielles auraient leurs dérivées en y, z comparables à $\frac{dN_1}{dx}$, comme il arrive toutes les fois que de petites torsions se superposent à des flexions sans produire des glissements g_{xy}, g_{xz} très-supérieurs à ceux que causent les flexions elles-mêmes.

---

symétrie de distribution des pressions intérieures de part et d'autre de chacune de ces sections, ou seulement les cinq relations, qu'implique cette symétrie, $T_3 = 0$, $T_2 = 0$, $\frac{d}{dx}(N_2, N_3, T_1) = 0$. En effet, T_3, T_2 disparaissant alors des six formules linéaires qui relient toujours les ∂, g aux N, T, les quatre premières formules (4) subsisteraient, l'expression (5) se réduirait à (6), qui conduirait à la relation (8), et la première (1) deviendrait $\frac{dN_1}{dx} = 0$. Par suite, les dérivées en x des six déformations ∂, g, fonctions linéaires connues de N_1, N_2, N_3, T_1, s'annuleraient, et, les relations (10), (10 *bis*), (11) étant vérifiées, on arriverait, comme dans les nos 5 et 6, aux formules cherchées (12) et (18) : de toutes les composantes N, T des pressions, N_1 seule subsisterait.

Je remarquerai encore que rien n'est changé aux démonstrations exposées dans le Mémoire pour ces formules (12) et (18), quand, au lieu de la première condition spéciale (2), qui exprime la nullité de la composante longitudinale de la pression exercée sur la surface latérale du prisme, on en prend une autre, consistant, par exemple, à se donner directement, en fonction de y et z, soit cette composante $T_3 \cos\alpha + T_2 \sin\alpha$, soit les déplacements longitudinaux u produits sur le contour d'une section σ. On démontrerait, en opérant comme il a été fait aux nos 8 et 9, que la valeur de u aux divers points de σ est encore déterminée. Si le prisme est homogène, et que, comme il arrive toujours, $H' = H$, on reconnaît, en particulier, très-aisément, qu'il est possible d'attribuer à la composante dont il s'agit, $T_3 \cos\alpha + T_2 \sin\alpha$, des valeurs telles que les sections σ restent planes et normales à une fibre déterminée, ou telles qu'on ait $u = 0$ dans les formules (21) et suivantes; alors le phénomène de la torsion consiste en une simple rotation des sections l'une devant l'autre. MM. William Thomson et Tait, qui ont étudié cette sorte de torsion *forcée* aux nos 702 et 703 de leur *Traité de Philosophie naturelle*, l'ont appelée *torsion simple*. Il importe d'observer qu'elle n'est jamais réalisée et ne paraît même pas pratiquement réalisable, si ce n'est dans le cas simple, déjà traité par Coulomb, du cylindre circulaire, isotrope autour de son axe, cas pour lequel elle se confond avec la torsion ordinaire.

Sur l'équation dont dépendent les inégalités séculaires des planètes.

PAR M. ÉMILE SOURANDER.

Cette équation, de la forme

$$\begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - x & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - x \end{vmatrix} = 0,$$

où

$$a_{ik} = a_{ki},$$

fut rencontrée pour la première fois par Laplace [1], dans ses recherches sur les mouvements des planètes.

Lorsque n est égal à 3, elle devient

$$\begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - x & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - x \end{vmatrix} = 0,$$

équation qui détermine les axes principaux des surfaces du second ordre, les forces élastiques principales et les moments principaux d'inertie des corps.

La réalité des racines de l'équation précédente fut prouvée par La-

[1] *Mémoires de l'Académie de Paris*, année 1772, p. 343.

grange [1]. D'autres démonstrations, s'étendant au cas général, ont été données par Cauchy [2] et Jacobi [3] et plus tard par MM. Sylvester [4] et Grunert [5].

La réalité des racines de l'équation qui détermine les axes principaux des lignes du second ordre

$$\begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - x \end{vmatrix} = 0$$

étant évidente par la décomposition en carrés de son discriminant,

$$(x_1 - x_2)^2 = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2,$$

M. Kummer [6], par la voie du tâtonnement, parvint le premier à une décomposition analogue du discriminant de l'équation cubique.

Bientôt après M. Borchardt [7], à l'aide de quelques théorèmes sur les déterminants de Vandermonde, Jacobi et Cauchy, décomposa en carrés le discriminant de l'équation générale.

D'autres méthodes encore, pour l'équation du troisième degré, ont été données par Hesse [8], en se servant de quelques formules de Jacobi [9], et plus récemment par MM. Bauer [10] et Geyser [11]. La méthode de Hesse se fonde sur les substitutions orthogonales, et celle de M. Bauer sur les propriétés des déterminants, tandis que M. Geyser arrive au but en prenant pour point de départ quelques considérations géométriques.

Tous ces travaux, et surtout ceux de Hesse [12], attestent assez le vif

---

[1] *Mémoires de l'Académie de Berlin*, année 1773, p. 85.

[2] *Exercices de Mathématiques*, t. IV, p. 140; 1829.

[3] *Journal de Crelle*, t. XII, p. 1; 1834.

[4] *Philosophical Magazine*, t. II, p. 138; 1852.

[5] *Archiv der Mathematik von Grunert*, t. XXIX, p. 442; 1857.

[6] *Journal de Crelle*, t. XXVI, p. 268; 1843.

[7] *Journal de Crelle*, t. XXX, p. 38; 1846. Ce journal, t. XII, p. 50; 1847.

[8] *Vorlesungen uber anal. Geom. des Raumes*, p. 320; 1861.

[9] *Journal de Crelle*, t. XXX, p. 46; 1846.

[10] *Journal de Crelle*, t. LXXI, p. 40; 1870.

[11] *Journal de Crelle*, t. LXXXII, p. 47; 1877.

[12] *Vorlesungen über anal. Geom. des Raumes*, p. 279; 1869.

intérêt que ce problème a su éveiller. Je ne crois donc pas inopportun d'ajouter aux précédentes une méthode générale qui me paraît plus directe, et dont les résultats se présentent sous une forme abrégée et plus simple.

J'exprimerai d'abord, à l'aide des coefficients de l'équation

$$(1) \qquad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = 0,$$

la fonction critique D de ses racines, définie par l'égalité

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{r} D = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\ldots(x_n - x_1) \\ (x_3 - x_2)\ldots(x_n - x_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (x_n - x_{n-1}). \end{array} \right.$$

Son discriminant, obtenu par la méthode dialytique de M. Sylvester, pourra s'écrire

$$\begin{vmatrix} a_1 & 2a_2 & \ldots & (n-1)a_{n-1} & na_n & 0 & \ldots & 0 \\ na_0 & (n-1)a_1 & \ldots & 2a_{n-2} & a_{n-1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_1 & \ldots & (n-2)a_{n-2} & (n-1)a_{n-1} & na_n & \ldots & 0 \\ 0 & na_0 & \ldots & 3a_{n-3} & 2a_{n-2} & a_{n-1} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_1 & 2a_2 & 3a_3 & \ldots & na_n \\ 0 & 0 & \ldots & na_0 & (n-1)a_1 & (n-2)a_2 & \ldots & a_{n-1} \end{vmatrix},$$

et par celle de Bézout,

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1,n-1} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n-1,1} & c_{n-1,2} & \ldots & c_{n-1,n-1} \end{vmatrix},$$

où

$$(3) \qquad c_{ik} = d_{i-1,k} + d_{i-2,k+1} + \ldots + d_{0,i+k-1} = c_{ki}$$

et

$$(4) \qquad d_{ik} = (i+1)(n-k)a_{i+1}a_k - (k+1)(n-i)a_{k+1}a_i.$$

Le dernier discriminant peut aussi se déduire du premier, comme l'a montré M. Baltzer dans son Traité des déterminants.

En désignant ces déterminants par R, nous aurons maintenant la relation

$$(5) \qquad n^{n-2}a_n^{2n-2}D^2 = R.$$

Pour le démontrer, je suppose égaux à zéro tous les coefficients, excepté a_0 et a_n. Les déterminants R deviennent par là

$$(6) \qquad R = (-1)^{\binom{n}{2}} n^{2n-2}(a_0 a_n)^{n-1}.$$

Par suite d'un théorème connu de Cauchy, D peut encore s'écrire

$$\begin{vmatrix} x_1^0 & x_2^0 & \dots & x_n^0 \\ x_1^1 & x_2^1 & \dots & x_n^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix};$$

d'où, en élevant au carré l'égalité due à M. Cayley,

$$(7) \qquad D^2 = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1} & s_n & \dots & s_{2n-2} \end{vmatrix},$$

dans laquelle

$$(8) \qquad s_m = \sum_{i=1}^{i=n} x_i^m.$$

Ce déterminant se réduit, par la même supposition, à l'aide des identités de Newton, à

$$(9) \qquad D^2 = (-1)^{\binom{n}{2}} n^n \left(\frac{a_0}{a_n}\right)^{n-1}.$$

Nous savons aussi, par les recherches d'Euler sur les résultantes,

que D^2 et R ne diffèrent que par un facteur, fonction de a_n. Les valeurs particulières que nous venons d'obtenir vérifient donc la relation énoncée.

Désignons à présent par δ le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

et par α_{11}, α_{12}, ... les déterminants complémentaires des éléments a_{11}, a_{12}, ..., ce qui nous permet d'écrire l'équation cubique

$$(10)\qquad \delta - (\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{23})x + (a_{11} + a_{22} + a_{33})x^2 - x^3 = 0,$$

et identifions cette équation avec la suivante :

$$(11)\qquad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 = 0,$$

qui a pour discriminant, d'après les formules données plus haut,

$$(12)\qquad 3a_3^4 D^2 = \begin{vmatrix} 2(a_1 a_1 - 3a_0 a_2) & (a_1 a_2 - 9a_0 a_3 \\ (a_1 a_2 - 9a_0 a_3) & 2(a_2 a_2 - 3a_1 a_3) \end{vmatrix}.$$

Avec les notations

$$(13)\qquad \begin{cases} a_{14} = \dfrac{a_{22} - a_{33}}{\sqrt{6}}, & \alpha_{14} = \dfrac{\alpha_{22} - \alpha_{33}}{\sqrt{6}}, \\ a_{24} = \dfrac{a_{33} - a_{11}}{\sqrt{6}}, & \alpha_{24} = \dfrac{\alpha_{33} - \alpha_{11}}{\sqrt{6}}, \\ a_{34} = \dfrac{a_{11} - a_{22}}{\sqrt{6}}, & \alpha_{34} = \dfrac{\alpha_{11} - \alpha_{22}}{\sqrt{6}}, \end{cases}$$

nous aurons d'abord

$$(14)\qquad \begin{cases} a_2 a_2 - 3a_1 a_3 = (a_{11} + a_{22} + a_{33})^2 \\ \qquad - 3(a_{11}a_{22} + a_{11}a_{33} + a_{22}a_{33} - a_{12}^2 - a_{13}^2 - a_{23}^2 \\ \qquad = 3(a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{14}^2 + a_{23}^2 + a_{24}^2 + a_{34}^2). \end{cases}$$

Le théorème de Jacobi, s'exprimant par la formule

$$P\frac{d^2P}{da_{rs}da_{r_1s_1}} = \frac{dP}{da_{rs}}\frac{dP}{da_{r_1s_1}} - \frac{dP}{da_{r_1s}}\frac{dP}{da_{rs_1}},$$

nous donne aussi

$$(16)\quad \left\{ \begin{aligned} \delta &= \frac{\alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{23}^2}{a_{11}} = \frac{\alpha_{33}\alpha_{11} - \alpha_{31}^2}{a_{22}} = \frac{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2}{a_{33}} \\ &= \frac{\alpha_{11}\alpha_{22} + \alpha_{11}\alpha_{33} + \alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{12}^2 - \alpha_{13}^2 - \alpha_{23}^2}{a_{11} + a_{22} + a_{33}}. \end{aligned} \right.$$

La dernière expression s'obtient en additionnant les numérateurs ainsi que les dénominateurs des fractions précédentes, procédé d'Euclide qui pourrait faciliter bien des recherches, comme le remarque M. Lindelöf dans son *Traité de Géométrie analytique*.

En développant le déterminant δ, d'après un autre théorème connu, nous obtiendrons

$$(17)\quad \left\{ \begin{aligned} \delta &= a_{11}\alpha_{11} + a_{21}\alpha_{21} + a_{31}\alpha_{31} = a_{12}\alpha_{12} + a_{22}\alpha_{22} + a_{32}\alpha_{32} \\ &= a_{13}\alpha_{13} + a_{23}\alpha_{23} + a_{33}\alpha_{33} \\ &= \frac{a_{11}\alpha_{11} + a_{22}\alpha_{22} + a_{33}\alpha_{33} + 2a_{12}\alpha_{12} + 2a_{13}\alpha_{13} + 2a_{23}\alpha_{23}}{3}. \end{aligned} \right.$$

Cette expression résulterait également de l'application du théorème d'Euler sur les fonctions homogènes.

Les développements précédents nous donnent encore

$$(18)\quad \left\{ \begin{aligned} a_1 a_1 - 3a_0 a_2 &= (\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33})^2 \\ &\quad - 3(\alpha_{11}\alpha_{22} + \alpha_{11}\alpha_{33} + \alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{12}^2 - \alpha_{13}^2 - \alpha_{23}^2) \\ &= 3(\alpha_{12}^2 + \alpha_{13}^2 + \alpha_{14}^2 + \alpha_{23}^2 + \alpha_{24}^2 + \alpha_{34}^2); \end{aligned} \right.$$

et

$$(19)\quad \left\{ \begin{aligned} & a_1 a_2 - 9a_0 a_3 \\ &\quad = 3(a_{11}\alpha_{11} + a_{22}\alpha_{22} + a_{33}\alpha_{33} + 2a_{12}\alpha_{12} + 2a_{13}\alpha_{13} + 2a_{23}\alpha_{23}) \\ &\qquad - (a_{11} + a_{22} + a_{33})(\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}) \\ &\quad = 6(a_{12}\alpha_{12} + a_{13}\alpha_{13} + a_{14}\alpha_{14} + a_{23}\alpha_{23} + a_{24}\alpha_{24} + a_{34}\alpha_{34}). \end{aligned} \right.$$

A l'aide des relations (14), (18) et (19), l'égalité (12) devient

$$(20)\qquad \frac{D^2}{12} = \begin{vmatrix} a_{12}a_{12}+a_{13}a_{13}+a_{14}a_{14}+a_{23}a_{23}+a_{24}a_{24}+a_{34}a_{34} & a_{12}\alpha_{12}+a_{13}\alpha_{13}+a_{14}\alpha_{14}+a_{23}\alpha_{23}+a_{24}\alpha_{24}+\alpha_{34}\alpha_{34} \\ a_{12}\alpha_{12}+a_{13}\alpha_{13}+a_{14}\alpha_{14}+a_{23}\alpha_{23}+a_{24}\alpha_{24}+a_{34}\alpha_{34} & \alpha_{12}\alpha_{12}+\alpha_{13}\alpha_{13}+\alpha_{14}\alpha_{14}+\alpha_{23}\alpha_{23}+\alpha_{24}\alpha_{24}+\alpha_{34}\alpha_{34} \end{vmatrix}$$

Ce déterminant est composé de deux systèmes égaux :

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{23} & a_{24} & a_{34} \\ \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{34} \end{vmatrix}$$

et peut par conséquent, d'après le théorème de Binet et Cauchy, se mettre sous la forme

$$(21)\qquad \frac{D^2}{12} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{23} & a_{24} & a_{34} \\ \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{34} \end{vmatrix}^2,$$

notation qui est due à M. Baltzer, et qui équivaut à la somme des carrés des quinze déterminants que l'on obtient en combinant les six colonnes deux à deux.

Si, pour abréger, nous désignons, à l'exemple de M. Bauer, par $(a_{13}\alpha_{23})\ldots$ les déterminants

$$\begin{vmatrix} a_{13} & a_{23} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} \end{vmatrix}, \quad \ldots,$$

ces carrés seront

$$(22)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{D^2}{12} = {} & (a_{13}\alpha_{23})^2 + (a_{23}\alpha_{12})^2 + (a_{12}\alpha_{13})^2 + (a_{12}\alpha_{34})^2 \\ & + (a_{13}\alpha_{24})^2 + (a_{23}\alpha_{14})^2 + (a_{12}\alpha_{14})^2 + (a_{13}\alpha_{34})^2 \\ & + (a_{23}\alpha_{24})^2 + (a_{12}\alpha_{24})^2 + (a_{13}\alpha_{14})^2 + (a_{24}\alpha_{34})^2 \\ & + (a_{14}\alpha_{24})^2 + (a_{34}\alpha_{14})^2 + (a_{24}\alpha_{34})^2. \end{aligned}\right.$$

Pour simplifier, le système (13) nous offre d'abord les identités

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned} a_{14} + a_{24} + a_{34} &= 0, \\ \alpha_{14} + \alpha_{24} + \alpha_{34} &= 0, \end{aligned}\right.$$

et par là

$$(24)\qquad (a_{14}\alpha_{24}) = (a_{34}\alpha_{14}) = (a_{24}\alpha_{34}),$$

à l'aide desquelles le discriminant se réduit à treize carrés, forme sous laquelle l'a mis M. Borchardt.

Les développements

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned}
&a_{12}\alpha_{11} + a_{22}\alpha_{21} + a_{32}\alpha_{31} = 0,\\
&a_{11}\alpha_{12} + a_{21}\alpha_{22} + a_{31}\alpha_{32} = 0,\\
&a_{11}\alpha_{13} + a_{21}\alpha_{23} + a_{31}\alpha_{33} = 0,\\
&a_{13}\alpha_{11} + a_{23}\alpha_{21} + a_{33}\alpha_{31} = 0,\\
&a_{13}\alpha_{12} + a_{23}\alpha_{22} + a_{33}\alpha_{32} = 0,\\
&a_{12}\alpha_{13} + a_{22}\alpha_{23} + a_{32}\alpha_{33} = 0
\end{aligned}\right.$$

nous conduisent ensuite aux relations, rapportées par M. Bauer,

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned}
&(a_{12}\alpha_{34}) = \frac{(a_{13}\alpha_{23})}{\sqrt{6}},\\
&(a_{13}\alpha_{24}) = \frac{(a_{23}\alpha_{12})}{\sqrt{6}},\\
&(a_{23}\alpha_{14}) = \frac{(a_{12}\alpha_{13})}{\sqrt{6}},
\end{aligned}\right.$$

et qui réduisent le discriminant à la forme de dix carrés que lui a donnée ce savant.

Par suite des identités (23), nous aurons encore

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned}
&(a_{12}\alpha_{14}) + (a_{12}\alpha_{24}) + (a_{12}\alpha_{34}) = 0,\\
&(a_{13}\alpha_{14}) + (a_{13}\alpha_{24}) + (a_{13}\alpha_{34}) = 0,\\
&(a_{23}\alpha_{14}) + (a_{23}\alpha_{24}) + (a_{23}\alpha_{34}) = 0.
\end{aligned}\right.$$

Moyennant ces relations, trouvées par Hesse, le discriminant se met enfin sous la forme de sept carrés de M. Kummer.

Quand le discriminant de l'équation cubique s'évanouit, le lieu géométrique, en coordonnées rectangulaires, de l'équation

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned}
&a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz\\
&\qquad + 2a_{12}xy + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0
\end{aligned}\right.$$

est une surface de révolution du second ordre, dont nous obtenons les caractères analytiques en égalant à zéro deux des trois premiers carrés (22).

Pour le démontrer, nous avons l'identité suivante, rapportée par M. Bauer,

$$(29)\qquad a_{12}(a_{13}\alpha_{23}) + a_{13}(a_{23}\alpha_{12}) + a_{23}(a_{12}\alpha_{13}) = 0,$$

et de là, par un changement partiel des indices,

$$(30)\qquad \begin{cases} a_{12}(a_{14}\alpha_{23}) + a_{14}(a_{23}\alpha_{12}) + a_{23}(a_{12}\alpha_{14}) = 0, \\ a_{12}(a_{13}\alpha_{34}) + a_{13}(a_{34}\alpha_{12}) + a_{34}(a_{12}\alpha_{13}) = 0, \\ a_{24}(a_{13}\alpha_{23}) + a_{13}(a_{23}\alpha_{24}) + a_{23}(a_{24}\alpha_{13}) = 0 \end{cases}$$

et

$$(31)\qquad a_{34}(a_{13}\alpha_{14}) + a_{13}(a_{14}\alpha_{34}) + a_{14}(a_{34}\alpha_{13}) = 0.$$

Ces relations et les formules (24), (26) et (27) font voir que tous les autres carrés s'évanouissent en même temps.

Les conditions analytiques des surfaces du second ordre peuvent donc s'écrire

$$(32)\qquad \frac{\alpha_{12}}{a_{12}} = \frac{\alpha_{13}}{a_{13}} = \frac{\alpha_{23}}{a_{23}}.$$

Si un seul des coefficients a_{12}, a_{13}, a_{23} était nul, les trois premiers carrés et le discriminant ne pourraient s'évanouir. Dans les autres cas, l'égalité (22) nous donne

$$(33)\qquad \begin{cases} a_{12} = a_{13} = 0, \quad D^2 = [(a_{22} - a_{33})^2 + 4a_{23}^2][(a_{33} - a_{11})(a_{11} - a_{22}) + a_{23}^2]^2, \\ a_{12} = a_{23} = 0, \quad D^2 = [(a_{33} - a_{11})^2 + 4a_{13}^2][(a_{11} - a_{22})(a_{22} - a_{33}) + a_{13}^2]^2, \\ a_{13} = a_{23} = 0, \quad D^2 = [(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2][(a_{22} - a_{33})(a_{33} - a_{11}) + a_{12}^2]^2 \end{cases}$$

et

$$(34)\qquad a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0, \quad D^2 = [(a_{11} - a_{22})(a_{11} - a_{33})(a_{22} - a_{33})]^2,$$

d'où les conditions

$$(35)\qquad \begin{cases} a_{12} = a_{13} = 0, \quad (a_{33} - a_{11})(a_{11} - a_{22}) + a_{23}^2 = 0, \\ a_{12} = a_{23} = 0, \quad (a_{11} - a_{22})(a_{22} - a_{33}) + a_{13}^2 = 0, \\ a_{13} = a_{23} = 0, \quad (a_{22} - a_{33})(a_{33} - a_{11}) + a_{12}^2 = 0 \end{cases}$$

et

$$(36)\qquad a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0, \quad (a_{11} - a_{22})(a_{11} - a_{33})(a_{22} - a_{33}) = 0.$$

Toutes ces conditions sont rapportées pour la première fois par Bourdon et Mondot [*].

Les égalités (26) font voir encore que le discriminant s'évanouit avec les a_{14}, a_{24}, a_{34}, α_{14}, α_{24}, α_{34}, d'où résultent les conditions particulières

$$(37) \qquad a_{11} = a_{22} = a_{33}, \quad a_{12}^2 = a_{13}^2 = a_{23}^2.$$

Échangeons à présent la notation du système (13) contre

$$(38) \qquad \begin{cases} {}_{ik}a = \dfrac{a_{ii} - a_{kk}}{\sqrt{6}}, \\ {}_{ik}\alpha = \dfrac{\alpha_{ii} - \alpha_{kk}}{\sqrt{6}}. \end{cases}$$

L'égalité (21) devient par là

$$(39) \qquad \frac{D^2}{12} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{23} & {}_{12}a & {}_{13}a & {}_{23}a \\ \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{23} & {}_{12}\alpha & {}_{13}\alpha & {}_{23}\alpha \end{vmatrix}^2.$$

En multipliant la première ligne de ce système par a_2, et en l'additionnant avec la seconde ligne, ce qui évidemment ne change pas la valeur du système, nous obtiendrons

$$(40) \qquad \frac{D^2}{12} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{23} & {}_{12}a & {}_{13}a & {}_{23}a \\ a''_{12} & a''_{13} & a''_{23} & {}_{12}a'' & {}_{13}a'' & {}_{23}a'' \end{vmatrix}^2,$$

où

$$(41) \qquad \begin{cases} a''_{ik} = \displaystyle\sum_{s=1}^{s=3} a_{is}a_{sk} = a''_{ki}, \\ {}_{ik}a'' = \dfrac{a''_{ii} - a''_{kk}}{\sqrt{6}}. \end{cases}$$

Le procédé qui nous a permis de décomposer en carrés le discriminant de l'équation cubique, et qui s'appliquerait facilement à l'équa-

---

[*] *Correspondance sur l'École Polyt.*, t. II, p. 196 et 205; 1811.

tion du quatrième degré, pourrait sans doute être étendu au cas général. Je démontrerai ici que le discriminant de l'équation générale sera susceptible d'une décomposition analogue à celle de la formule (40).

Multiplions à cet effet par s_0 toutes les colonnes, excepté la première, du déterminant

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1} & s_n & \dots & s_{2n-2} \end{vmatrix},$$

et divisons sa première ligne par le même élément; l'égalité (7) devient par là

$$(42)\quad n^{n-2}D^2 = \begin{vmatrix} 1 & s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_0 s_2 & s_0 s_3 & \dots & s_0 s_n \\ s_2 & s_0 s_3 & s_0 s_n & \dots & s_0 s_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1} & s_0 s_n & s_0 s_{n+1} & \dots & s_0 s_{2n-2} \end{vmatrix}$$

Si nous multiplions successivement par s_1, s_2, s_{n-1} la première colonne du nouveau déterminant, et que nous la soustrayions des colonnes correspondantes, celui-ci prendra la forme

$$(43)\quad n^{n-2}D^2 = \begin{vmatrix} (s_0 s_2 - s_1 s_1) & (s_0 s_3 - s_1 s_2) & \dots & (s_0 s_n - s_1 s_{n-1}) \\ (s_0 s_3 - s_2 s_1) & (s_0 s_4 - s_2 s_2) & \dots & (s_0 s_{n+1} - s_2 s_{n-1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (s_0 s_n - s_{n-1} s_1) & (s_0 s_{n+1} - s_{n-1} s_2) & \dots & (s_0 s_{2n-2} - s_{n-1} s_{n-1}) \end{vmatrix}.$$

En désignant par δ le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

et par $a_{ik}^{(m)}$ les éléments du déterminant δ^m, nous aurons aussi

$$(44) \qquad a_{ik}^{(m)} = \sum_{s=1}^{s=n} a_{is}^{(r)} a_{sk}^{(m-r)} = a_{ki}^{(m)},$$

où r est un nombre quelconque de zéro à m, et $a_{ik}^{(0)}$ 1 ou 0 selon que i est égal ou non à k, hypothèse qui satisfait à l'égalité

$$(45) \qquad \delta^0 = 1.$$

En mettant $a_{ii}^{(m)} - x$ à la place de $a_{ii}^{(m)}$ dans le déterminant δ^m, nous obtiendrons ensuite une équation qui a pour racines, comme l'a montré M. Borchardt, les $m^{\text{ièmes}}$ puissances des racines de l'équation générale; d'où

$$(46) \qquad s_m = \sum_{i=1}^{i=n} a_{ii}^{(m)} = \sum_{i,k=1}^{i,k=n} a_{ik}^{(r)} a_{ik}^{(m-r)}.$$

Ces formules sont dues à M. Borchardt, et la voie par laquelle nous les obtenons ici, à une remarque de M. Henrici [1].

A l'aide de ces formules, chaque élément du déterminant (43) sera représenté par

$$(47) \qquad s_0 s_{p+q} - s_p s_q = \begin{vmatrix} \Sigma a_{ik}^{(0)} a_{ik}^{(0)} & \Sigma a_{ik}^{(0)} a_{ik}^{(q)} \\ \Sigma a_{ik}^{(p)} a_{ik}^{(0)} & \Sigma a_{ik}^{(p)} a_{ik}^{(q)} \end{vmatrix}$$

Ce déterminant est composé des systèmes

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_{11}^{(p)} & a_{22}^{(p)} & a_{33}^{(p)} & \dots & a_{12}^{(p)} & a_{13}^{(p)} & a_{23}^{(p)} & \dots & a_{12}^{(p)} & a_{13}^{(p)} & a_{23}^{(p)} & \dots \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_{11}^{(q)} & a_{22}^{(q)} & a_{33}^{(q)} & \dots & a_{12}^{(q)} & a_{13}^{(q)} & a_{23}^{(q)} & \dots & a_{12}^{(q)} & a_{13}^{(q)} & a_{23}^{(q)} & \dots \end{vmatrix};$$

en y appliquant le théorème de Binet et Cauchy, nous aurons donc

$$(48) \quad \begin{cases} s_0 s_{p+q} - s_p s_q = 2n\big(a_{12}^{(p)} a_{12}^{(q)} + a_{13}^{(p)} a_{13}^{(q)} + a_{23}^{(p)} a_{23}^{(q)} + \dots \\ \qquad\qquad + {}_{12}a^{(p)}\,{}_{12}a^{(q)} + {}_{13}a^{(p)}\,{}_{13}a^{(q)} + {}_{23}a^{(p)}\,{}_{23}a^{(q)} + \dots\big), \end{cases}$$

[1] *Journal de Crelle*, t. LXV, p. 18; 1866.

où

$$(49)\qquad {}_{ik}a^{(m)} = \frac{a_{ii}^{(m)} - a_{kk}^{(m)}}{\sqrt{2n}}.$$

La dernière formule et celle de (44) correspondent aux formules (41).

Si l'on désigne par $\Sigma a^{(p)} a^{(q)}$ l'expression (48), débarrassée du facteur $2n$, l'égalité (43) pourra s'écrire

$$(50)\qquad \frac{D^2}{n\,2^{n-1}} = \begin{vmatrix} \Sigma a' a' & \Sigma a' a'' & \dots & \Sigma a' a^{(n-1)} \\ \Sigma a'' a' & \Sigma a'' a'' & \dots & \Sigma a'' a^{(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Sigma a^{(n-1)} a' & \Sigma a^{(n-1)} a'' & \dots & \Sigma a^{(n-1)} a^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant, composé de deux systèmes égaux,

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{23} & \dots & {}_{12}a & {}_{13}a & {}_{23}a & \dots \\ a''_{12} & a''_{13} & a''_{23} & \dots & {}_{12}a'' & {}_{13}a'' & {}_{23}a'' & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{12}^{(n-1)} & a_{13}^{(n-1)} & a_{23}^{(n-1)} & \dots & {}_{12}a^{(n-1)} & {}_{13}a^{(n-1)} & {}_{23}a^{(n-1)} & \dots \end{vmatrix},$$

devient enfin, à l'aide du même théorème,

$$(51)\qquad \frac{D^2}{n\,2^{n-1}} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{23} & \dots & {}_{12}a & {}_{13}a & {}_{23}a & \dots \\ a''_{12} & a''_{13} & a''_{23} & \dots & {}_{12}a'' & {}_{13}a'' & {}_{23}a'' & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{12}^{(n-1)} & a_{13}^{(n-1)} & a_{23}^{(n-1)} & \dots & {}_{12}a^{(n-1)} & {}_{13}a^{(n-1)} & {}_{23}a^{(n-1)} & \dots \end{vmatrix}^2,$$

où le nombre des carrés sera $\binom{n\,n-1}{n-1}$, tandis que les carrés qu'il faut former en suivant la méthode de M. Borchardt sont au nombre de $\binom{m}{n}$.

M. Borchardt, à l'occasion de ce problème, a montré encore que les fonctions auxiliaires de Sturm pouvaient être remplacées par la série

$$p_1,\quad p_2,\quad \dots,\quad p_n,$$

où

$$(52)\qquad p_m = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{m-1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{m-1} & s_m & \dots & s_{2m-2} \end{vmatrix}.$$

et le procédé exposé plus haut nous donne sans peine

$$(53)\quad \frac{p_m}{n\,2^{m-1}} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{23} & \cdots & {}_{12}a & {}_{13}a & {}_{23}a & \cdots \\ a''_{12} & a''_{13} & a''_{23} & \cdots & {}_{12}a'' & {}_{13}a'' & {}_{23}a'' & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a^{(m-1)}_{12} & a^{(m-1)}_{13} & a^{(m-1)}_{23} & \cdots & {}_{12}a^{(m-1)} & {}_{13}a^{(m-1)} & {}_{23}a^{(m-1)} & \cdots \end{vmatrix}^2.$$

Propriétés générales des polyèdres réguliers étoilés;

PAR M. GEORGES DOSTOR.

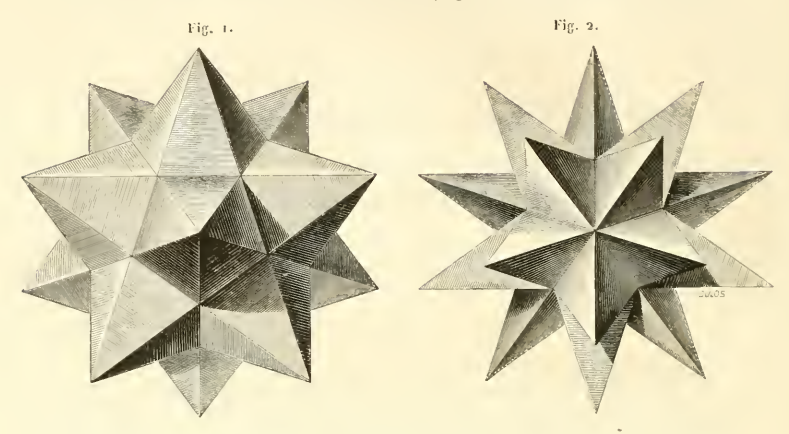
1. Nous nous proposons de donner les formules *générales* qui lient entre eux les divers éléments d'un polyèdre régulier, que ce corps soit convexe ou *étoilé*. Dans la recherche de ces formules, nous ferons intervenir un nouvel élément, qui n'a pas encore été considéré jusqu'ici : *le rayon de la sphère tangente aux arêtes du polyèdre régulier*. L'emploi de ce rayon nous permet d'établir nos formules d'une manière fort simple, presque élémentaire, et nous conduit à des résultats assez remarquables pour mériter d'être signalés.

2. On sait que, indépendamment des cinq polyèdres réguliers convexes, il existe encore quatre polyèdres réguliers étoilés. Les deux premiers paraissent appartenir à Kepler, qui, dans son *Harmonique du Monde* [*], fournit un double dessin de chacun de ces corps constellés : les deux polyèdres réguliers étoilés y sont représentés de face et de côté, par rapport à l'un des pentagones réguliers étoilés qui les terminent.

Les deux polyèdres réguliers étoilés de Kepler sont des dodécaèdres; dans l'un et l'autre les faces sont des pentagones réguliers de seconde espèce; mais dans le premier (*fig.* 1) les *douze* angles solides sont pen-

[*] *Harmonices mundi libri V*, p. 54. Lincii Austriæ, 1619; in-fol.

taèdres et convexes; et dans le second (*fig.* 2) les *vingt* angles solides



sont des trièdres. Ces deux dodécaèdres sont l'un de *troisième* espèce à faces étoilées, et l'autre de *septième* espèce à faces étoilées.

5. Les deux autres polyèdres réguliers étoilés n'ont été trouvés qu'en 1809 par l'illustre Poinsot, qui a établi, d'une manière générale, la théorie des polygones et polyèdres réguliers étoilés [*].

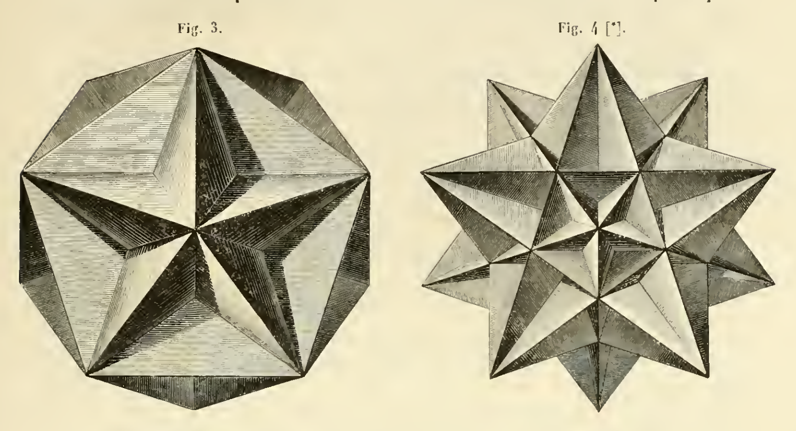
Le premier des polyèdres réguliers étoilés de Poinsot (*fig.* 3) est terminé par *douze* faces pentagonales convexes, sur lesquelles s'élèvent *douze* angles pentaèdres étoilés; le second (*fig.* 4) est formé par *vingt* faces triangulaires, qui comprennent entre elles *douze* angles pentaèdres étoilés. L'un de ces polyèdres est le dodécaèdre régulier étoilé de *troisième* espèce à faces convexes; l'autre est l'icocaèdre régulier étoilé de *septième* espèce à faces convexes.

Les deux polyèdres réguliers étoilés de Poinsot sont respectivement *conjugués* aux deux polyèdres réguliers étoilés de Kepler; car les faces du premier dodécaèdre de Kepler ont autant de côtés et sont de même espèce que les sommets du dodécaèdre de Poinsot, et les sommets du

[*] *Journal de l'École Polytechnique*, 1810, t. V, Xe Cahier; p. 16 à 48.

dodécaèdre de Kepler ont autant d'arêtes et sont de même espèce que

Fig. 3. Fig. 4 [*].



les faces du dodécaèdre de Poinsot. Il en est de même du dodécaèdre de Kepler, à sommets trièdres, et de l'icosaèdre de Poinsot.

§ I. — Relations générales entre les rayons des trois sphères, l'une inscrite a un polyèdre régulier quelconque, l'autre tangente aux arêtes et la troisième circonscrite au polyèdre régulier.

4. *Relation entre le rayon de la sphère inscrite au polyèdre et le rayon de la sphère tangente aux arêtes.* — Soient O le centre d'un polyèdre régulier (*fig* 5), AB l'une de ses arêtes et C le centre de l'une des deux faces régulières, auxquelles appartient cette arête AB. La droite OC sera perpendiculaire sur le plan ABC.

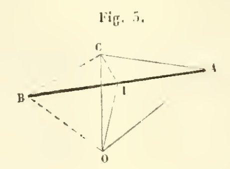
---

[*] Ces quatre figures, d'une exécution parfaite, sont empruntées au *Traité de Géométrie elémentaire* de MM. Rouché et de Comberousse, lequel forme l'Ouvrage le plus savant, le plus complet et peut-être le mieux rédigé qui ait été fait sur les éléments de la Géométrie. Le lecteur pourra consulter avec fruit la partie de la Géométrie de l'espace, p. 246 à 257, 4ᵉ édit., qui traite spécialement des polygones et polyèdres réguliers d'espèce supérieure.

Abaissons CI perpendiculairement sur l'arête AB; puis tirons les droites OI et OA. Le point I est nécessairement le milieu de l'arête AB et la ligne OI est perpendiculaire à cette arête.

Cela fait, il est évident que la droite OC est le rayon r de la sphère inscrite dans le polyèdre régulier; que la droite OA est le rayon R de

Fig. 5.



la sphère circonscrite à ce polyèdre et que OI est le rayon de la sphère tangente aux arêtes du même polyèdre. Nous représenterons ce dernier rayon par ρ.

Tirons les droites OB, CA et CB.

Supposons que chaque angle solide du polyèdre ait m faces et soit de l'espèce p; que chaque face du polyèdre soit un polygone de n côtés et de l'espèce q.

Par le rayon OA de la sphère circonscrite et par chacune des m arêtes, telles que AB, qui aboutissent au sommet A, menons un plan. Chacun des m plans ainsi conduits formera avec le suivant un angle dièdre, et les m angles dièdres ainsi obtenus comprendront p fois l'espace rempli par les quatre dièdres droits, que l'on peut former autour du rayon OA, espace angulaire, qui est mesuré par 2π. Il s'ensuit que chacun de nos m dièdres sera la $m^{\text{ième}}$ partie de p fois 2π, ou sera égal à $\frac{2p\pi}{m}$. Or le dièdre COAI, compris entre les deux plans OAC et OAI, est la moitié de l'un de ces dièdres; donc on a l'angle dièdre

$$(1) \qquad \text{COAI} = \frac{p\pi}{m}.$$

Puisque chaque face de notre polyèdre régulier est un polygone régulier de n côtés et de l'espèce q, l'angle au centre ACB de l'une de ces faces sera égal à la $n^{\text{ième}}$ partie de q fois quatre angles droits, ou

égal à $\frac{2q\pi}{n}$; par suite, on a l'angle plan

$$\text{ACI} = \frac{q\pi}{n}. \tag{2}$$

Cela posé, dans le tétraèdre IACO, dont nous prenons le point I pour sommet et par suite la face ACO pour base, projetons, sur le plan de la base, les trois faces latérales ICO, IAO et IAC; nous obtenons l'égalité

$$\text{ACO} = \text{ICO} \cos \text{ACI} + \text{IAO} \cos \text{COAI} + \text{IAC} \cos \text{IACO}. \tag{3}$$

Mais, en vertu de (2) et (1), nous avons

$$\cos \text{ACI} = \cos \frac{q\pi}{n}, \quad \cos \text{COAI} = \cos \frac{p\pi}{m};$$

d'ailleurs, l'angle dièdre IACO étant droit, il vient

$$\cos \text{IACO} = \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

Par conséquent, l'égalité (3) se réduit à

$$\text{ACO} = \text{ICO} \cos \frac{q\pi}{n} + \text{IAO} \cos \frac{p\pi}{m}. \tag{4}$$

Or il est évident que

$$\begin{aligned} \text{le triangle ACO} &= \tfrac{1}{2}\,\text{OC}.\text{AC} = \tfrac{1}{2}\,r.\text{AC}, \\ \text{le triangle ICO} &= \frac{1}{2}\,\text{OC}.\text{CI} = \frac{1}{2}\,r.\text{AC} \cos \frac{q\pi}{n}, \\ \text{et le triangle IAO} &= \frac{1}{2}\,\text{OI}.\text{AI} = \frac{1}{2}\,\rho.\text{AC} \sin \frac{q\pi}{n}. \end{aligned}$$

Nous obtenons donc, en substituant dans (4) et en divisant le résultat par $\frac{1}{2}$ AC,

$$r = r \cos^2 \frac{q\pi}{n} + \rho \sin \frac{q\pi}{n} \cos \frac{p\pi}{m},$$

ou

$$r\left(1 - \cos^2 \frac{q\pi}{n}\right) = \rho \sin \frac{q\pi}{n} \cos \frac{p\pi}{m}.$$

Remplaçant $1 - \cos^2 \frac{q\pi}{n}$ par $\sin^2 \frac{q\pi}{n}$, puis divisant par $\sin \frac{q\pi}{n}$, nous obtenons enfin la *relation*

(I) $$r \sin \frac{q\pi}{n} = \rho \cos \frac{p\pi}{m},$$

qui existe entre le rayon r de la sphère inscrite dans le polyèdre régulier et le rayon ρ de la sphère tangente aux arêtes du polyèdre.

5. Théorème I. — *Lorsque deux polyèdres réguliers conjugués sont circonscrits à une même sphère, les rayons des deux sphères tangentes aux arêtes sont entre eux dans le même rapport que les sinus des angles au centre, dans les faces des deux polyèdres réguliers.*

L'égalité (I) nous donne

$$\rho = r \frac{\sin \frac{q\pi}{n}}{\cos \frac{p\pi}{m}}.$$

Soit ρ' le rayon de la sphère, qui, dans le conjugué du polyèdre régulier précédent, touche les arêtes. Si ce polyèdre conjugué est aussi circonscrit à la sphère de rayon r, nous aurons

$$\rho' = r \frac{\sin \frac{p\pi}{m}}{\cos \frac{q\pi}{n}}.$$

Il vient donc, en divisant,

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{\sin \frac{q\pi}{n} \cos \frac{q\pi}{n}}{\sin \frac{p\pi}{m} \cos \frac{p\pi}{m}},$$

ou

(II) $$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{\sin \frac{2q\pi}{n}}{\sin \frac{2p\pi}{m}}.$$

6. *Relation entre le rayon* R *de la sphère circonscrite et celui ρ de*

la sphère tangente aux arêtes. — Le triangle AIO (*fig.* 6) nous donne

$$\overline{\mathrm{OA}}^2 = \overline{\mathrm{OI}}^2 + \overline{\mathrm{AI}}^2 = \overline{\mathrm{OI}}^2 + \overline{\mathrm{AC}}^2 \sin^2 \mathrm{ACI} = \overline{\mathrm{OI}}^2 + \left(\overline{\mathrm{AO}}^2 - \overline{\mathrm{CO}}^2\right) \sin^2 \mathrm{ACI}.$$

Fig. 6.

Remplaçant les quantités par leurs notations, nous obtenons

$$\mathrm{R}^2 = \rho^2 + (\mathrm{R}^2 - r^2) \sin^2 \frac{q\pi}{n},$$

d'où nous déduisons

$$\mathrm{R}^2 \left(1 - \sin^2 \frac{q\pi}{n}\right) = \rho^2 - r^2 \sin^2 \frac{q\pi}{n},$$

ou

$$\mathrm{R}^2 \cos^2 \frac{q\pi}{n} = \rho^2 - r^2 \sin^2 \frac{q\pi}{n}.$$

Si, dans cette égalité, nous mettons, à la place de $r \sin \frac{q\pi}{n}$, sa valeur $\rho \cos \frac{p\pi}{m}$, tirée de (I), nous aurons la relation demandée

$$\mathrm{R}^2 \cos^2 \frac{q\pi}{n} = \rho^2 - \rho^2 \cos^2 \frac{p\pi}{m} = \rho^2 \sin^2 \frac{p\pi}{m},$$

ou

(III) $$\mathrm{R} \cos \frac{q\pi}{n} = \rho \sin \frac{p\pi}{m}.$$

7. *Relation entre le rayon r de la sphère inscrite et celui* R *de la sphère circonscrite.* — Si nous divisons, membre à membre, les deux équations (III) et (I), nous aurons la relation

$$\frac{\mathrm{R} \cos \frac{q\pi}{n}}{r \sin \frac{q\pi}{n}} = \frac{\sin \frac{p\pi}{m}}{\cos \frac{p\pi}{m}},$$

qui se réduit à

$$\text{(IV)} \qquad \frac{R}{r} = \operatorname{tang}\frac{p\pi}{m}\operatorname{tang}\frac{q\pi}{n}.$$

Cette relation était connue pour les polyèdres réguliers convexes, c'est-à-dire pour les cas où $p = q = 1$.

8. Théorème II. — *Lorsque deux polyèdres réguliers conjugués sont inscrits dans une même sphère, les deux polyèdres sont aussi circonscrits à une même sphère;* et réciproquement.

Car, pour passer d'un polyèdre à son conjugué, il suffit d'échanger entre eux, dans (IV), d'abord les nombres n et m, puis les nombres q et p, ce qui n'altère pas le produit

$$\operatorname{tang}\frac{p\pi}{m}\operatorname{tang}\frac{q\pi}{n};$$

donc le rapport $\frac{R}{r}$ reste le même.

9. Corollaire. — *Lorsque deux polyèdres réguliers conjugués sont inscrits dans la même sphère, les faces de ces deux polyèdres se trouvent inscrites dans des petits cercles de même rayon.*

Car le rayon du cercle circonscrit à l'une des faces du premier polyèdre est le côté CA du triangle rectangle ACO (*fig.* 6), qui donne

$$\overline{CA}^2 = \overline{AO}^2 - \overline{OC}^2 = R^2 - r^2;$$

par suite, le rayon du cercle circonscrit à l'une des faces du polyèdre régulier conjugué a aussi pour valeur $\sqrt{R^2 - r^2}$.

10. Théorème III. — *Lorsque deux polyèdres réguliers conjugués sont inscrits ou circonscrits à la même sphère, le produit des rayons des deux sphères tangentes aux arêtes de ces polyèdres est égal au produit des rayons des deux sphères, l'une inscrite et l'autre circonscrite à nos deux polyèdres conjugués.*

Car on a, pour le premier polyèdre, en vertu de (III),

$$R \cos\frac{q\pi}{n} = \rho \sin\frac{p\pi}{m};$$

et, si ρ' est le rayon de la sphère tangente aux arêtes du second polyèdre, on aura, en vertu de (I),

$$r \sin\frac{p\pi}{m} = \rho' \cos\frac{q\pi}{n}.$$

On en tire, en multipliant,

$$\text{(V)} \qquad Rr = \rho\rho'.$$

11. *Relation entre les rayons* R, *r et* ρ *des trois sphères.* — Faisons le produit des deux égalités (III) et (I); nous obtenons la relation

$$Rr \sin\frac{q\pi}{n} \cos\frac{q\pi}{n} = \rho^2 \sin\frac{p\pi}{m} \cos\frac{p\pi}{m},$$

qui prend la forme remarquable

$$\text{(VI)} \qquad Rr \sin\frac{2q\pi}{n} = \rho^2 \sin\frac{2p\pi}{m}.$$

§ II. — Inclinaison mutuelle des faces adjacentes dans les polyèdres réguliers.

12. *Formule générale.* — Nous désignons par 2 I l'angle plan, qui mesure l'inclinaison de deux faces adjacentes dans le polyèdre régulier, dont les faces sont de n côtés et de l'espèce q, pendant que les angles solides sont de m faces et de l'espèce p.

L'angle 2 I est évidemment double de l'angle plan OIC (*fig.* 7).

Pour trouver la valeur de l'angle I, nous ferons remarquer que le triangle rectangle OCI nous donne de suite

$$OC = OI \sin OIC,$$

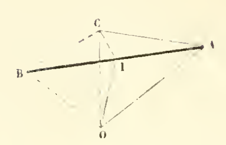
ou

$$r = \rho \sin I,$$

d'où nous tirons

$$\sin \mathrm{I} = \frac{r}{\rho}.$$

Fig. 7.



Mais, par la relation (I) du n° 4, nous avons

$$\frac{r}{\rho} = \frac{\cos\frac{p\pi}{m}}{\sin\frac{q\pi}{n}};$$

donc il nous vient

$$(\mathrm{I}) \qquad \sin \mathrm{I} = \frac{\cos\frac{p\pi}{m}}{\sin\frac{q\pi}{n}}.$$

Cette expression était connue pour les polyèdres réguliers convexes.

13. Théorème I. — *Lorsque deux polyèdres réguliers sont conjugués, les sinus des demi-inclinaisons des faces adjacentes sont* inversement *proportionnels aux sinus des angles au centre de ces faces.*

Soient I et I' les demi-inclinaisons des faces adjacentes dans deux polyèdres réguliers conjugués, qui sont terminés, le premier par des polygones de n côtés et de l'espèce q; le second par des polygones de m côtés et de l'espèce p.

Les angles solides du premier polyèdre sont de m faces et de l'espèce p, pendant que ceux du second sont de n faces et de l'espèce q.

Nous avons, par conséquent (n° **12**),

$$(1) \qquad \sin \mathrm{I} = \frac{\cos\frac{p\pi}{m}}{\sin\frac{q\pi}{n}}, \quad \sin \mathrm{I}' = \frac{\cos\frac{q\pi}{n}}{\sin\frac{p\pi}{m}}.$$

Divisant membre à membre, on obtient l'égalité

$$\frac{\sin I}{\sin I'} = \frac{\cos\frac{p\pi}{m}\ \sin\frac{p\pi}{m}}{\sin\frac{q\pi}{n}\ \cos\frac{q\pi}{n}},$$

qui revient à

$$\text{(II)}\qquad \frac{\sin I}{\sin I'} = \frac{\sin\frac{2p\pi}{m}}{\sin\frac{2q\pi}{n}}.$$

14. Corollaire. — Si nous rapprochons cette égalité de la relation (V) du n° **11**, nous en déduirons

$$\text{(III)}\qquad \rho^2 \sin I = Rr \sin I'.$$

15. Théorème II. — *Lorsque deux polyèdres réguliers sont conjugués, les cosinus des demi-inclinaisons des faces adjacentes sont* inversement *proportionnels aux sinus des demi-angles au centre de ces faces.*

Les deux égalités (1) nous donnent

$$\cos^2 I = 1 - \frac{\cos^2\frac{p\pi}{m}}{\sin^2\frac{q\pi}{n}},\quad \cos^2 I' = 1 - \frac{\cos^2\frac{q\pi}{n}}{\sin^2\frac{p\pi}{m}},$$

et, par suite,

$$\cos^2 I \sin^2\frac{q\pi}{n} = \sin^2\frac{q\pi}{n} - \cos^2\frac{p\pi}{m} = \sin^2\frac{q\pi}{n} + \sin^2\frac{p\pi}{m} - 1,$$

$$\cos^2 I' \sin^2\frac{p\pi}{m} = \sin^2\frac{p\pi}{m} - \cos^2\frac{q\pi}{n} = \sin^2\frac{p\pi}{m} + \sin^2\frac{q\pi}{n} - 1.$$

Les seconds membres étant égaux, on a

$$\cos^2 I \sin^2\frac{q\pi}{n} = \cos^2 I' \sin^2\frac{p\pi}{m},$$

d'où l'on tire la proportion

$$\text{(IV)}\qquad \frac{\cos I}{\cos I'} = \frac{\sin\frac{p\pi}{m}}{\sin\frac{q\pi}{n}},$$

qu'il fallait établir.

16. Théorème III. — *Lorsque deux polyèdres réguliers sont conjugués, les cotangentes des demi-inclinaisons des faces sont* directement *proportionnelles aux cosinus des demi-angles au centre de ces faces.*

Divisons, membre à membre, l'égalité (IV) par (II); nous obtenons la relation

$$\frac{\cos \mathrm{I} : \sin \mathrm{I}}{\cos \mathrm{I}' : \sin \mathrm{I}'} = \frac{\sin \frac{p\pi}{m} \sin \frac{2q\pi}{n}}{\sin \frac{q\pi}{n} \sin \frac{2p\pi}{m}}.$$

La première fraction est égale à $\frac{\cot \mathrm{I}}{\cot \mathrm{I}'}$; la seconde fraction, après suppression du facteur $2 \sin \frac{p\pi}{m} \sin \frac{q\pi}{n}$ commun à ses deux termes, se réduit à $\frac{\cos \frac{q\pi}{n}}{\cos \frac{p\pi}{m}}$. Nous avons donc

$$(\mathrm{V}) \qquad \frac{\cot \mathrm{I}}{\cot \mathrm{I}'} = \frac{\cos \frac{q\pi}{n}}{\cos \frac{p\pi}{m}}.$$

Cette formule trouvera son application plus loin, au n° **26**.

17. *Remarque.* — Faisons le produit des inverses des valeurs (1); nous aurons

$$\frac{1}{\sin \mathrm{I} \sin \mathrm{I}'} = \frac{\sin \frac{q\pi}{n} \sin \frac{p\pi}{m}}{\cos \frac{q\pi}{n} \cos \frac{p\pi}{m}} = \operatorname{tang} \frac{p\pi}{m} \operatorname{tang} \frac{q\pi}{n}.$$

Si nous mettons cette valeur dans la formule (IV) du n° **7**, celle-ci devient

$$(\mathrm{VI}) \qquad r = \mathrm{R} \sin \mathrm{I} \sin \mathrm{I}'.$$

18. *Inclinaisons mutuelles des faces adjacentes dans les divers polyèdres réguliers.* — Appliquons la formule (I) au calcul de l'incli-

naison des faces adjacentes dans les neuf polyèdres réguliers; nous obtiendrons des valeurs que nous réunissons dans le tableau suivant :

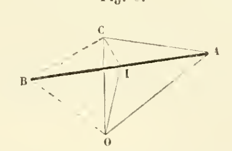
POLYÈDRES RÉGULIERS.	n.	q.	m.	p.	sin I.	tang I.	tang 2 I.	2 I.
Tétraèdre.............	3	1	3	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}.$	$\sin\frac{\pi}{4}\cdot$	$2\sqrt{2}.$	70°.31′.43″,6
Hexaèdre..............	4	1	3	1	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\sin\frac{\pi}{2}\cdot$	∞	90.00.00,0
Octaèdre..............	3	1	4	1	$\frac{1}{3}\sqrt{6}$	$2\sin\frac{\pi}{4}\cdot$	$-2\sqrt{2}.$	109.28.16,4
Dodécaèdre convexe....	5	1	3	1	$\frac{1}{10}\sqrt{50+10\sqrt{5}}.$	$2\sin\frac{3\pi}{10}\cdot$	$-2.$	116.35.54,2
Icosaèdre convexe......	3	1	5	1	$\frac{1}{6}(\sqrt{15}+\sqrt{3}).$	$4\sin^2\frac{3\pi}{10}.$	$-\frac{2}{5}\sqrt{5}.$	138.11.22,75
Dodécaèdre de Kepler à sommets pentaèdres..	5	2	5	1	$\frac{1}{10}\sqrt{50+10\sqrt{5}}.$	$2\sin\frac{3\pi}{10}\cdot$	$-2.$	116.35.54,2
Dodécaèdre de Poinsot.	5	1	5	2	$\frac{1}{10}\sqrt{50-10\sqrt{5}}.$	$2\sin\frac{\pi}{10}\cdot$	2	63.24. 5,8
Dodécaèdre de Kepler à sommets trièdres....	5	2	3	1	$\frac{1}{10}\sqrt{50-10\sqrt{5}}.$	$2\sin\frac{\pi}{10}\cdot$	2	63.24. 5.8
Icosaèdre de Poinsot...	3	1	5	2	$\frac{1}{6}(\sqrt{15}+\sqrt{3}).$	$4\sin^2\frac{\pi}{10}\cdot$	$\frac{2}{5}\sqrt{5}.$	41.38.37,25

Nous laissons au lecteur le soin de déduire de la comparaison de ces valeurs les conséquences, qui en découlent naturellement, et de déterminer lui-même la raison de ces conséquences.

§ III. — Expressions générales des rayons des trois sphères, en valeur de l'arête des polyèdres réguliers.

19. *Rayon de la sphère inscrite dans un polyèdre régulier, en valeur*

Fig. 8.



de l'arête a de ce polyèdre. Le triangle rectangle OCI (*fig.* 8) nous

fournit la valeur

$$r = \mathrm{OC} = \mathrm{CI}\,\mathrm{tang}\,\mathrm{OIC} = \mathrm{CI}\,\mathrm{tang}\,\mathrm{I};$$

mais nous avons, par le triangle rectangle ACI,

$$\mathrm{CI} = \mathrm{AI}\cot \mathrm{ACI} = \frac{a}{2}\cot\frac{q\pi}{n}.$$

Il nous viendra donc, en substituant,

$$(\mathrm{I}) \qquad 2r = a\cot\frac{q\pi}{n}\,\mathrm{tang}\,\mathrm{I}.$$

20. *Rayon de la sphère circonscrite à un polyèdre régulier, en valeur de l'arête a de ce polyèdre.* — Multiplions l'égalité précédente (I) par la formule (IV) du n° **7**; nous aurons de suite

$$2\mathrm{R} = a\,\mathrm{tang}\frac{p\pi}{m}\,\mathrm{tang}\frac{q\pi}{n}\cot\frac{q\pi}{n}\,\mathrm{tang}\,\mathrm{I};$$

mais on sait que

$$\mathrm{tang}\frac{q\pi}{n}\cot\frac{q\pi}{n} = 1;$$

donc il nous vient

$$(\mathrm{II}) \qquad 2\mathrm{R} = a\,\mathrm{tang}\frac{p\pi}{m}\,\mathrm{tang}\,\mathrm{I}.$$

21. *Rayon de la sphère tangente aux arêtes d'un polyèdre régulier, en valeur de l'une a de ces arêtes.* — Dans la formule (I), remplaçons r par sa valeur $\rho\dfrac{\cos\frac{p\pi}{m}}{\sin\frac{q\pi}{n}}$, fournie par l'égalité (I) du n° 4; elle devient

$$2\rho\frac{\cos\frac{p\pi}{m}}{\sin\frac{q\pi}{n}} = a\cot\frac{q\pi}{n}\,\mathrm{tang}\,\mathrm{I}.$$

Si nous multiplions les deux membres par $\sin\frac{q\pi}{n}$ et que nous divisions

les produits par $\cos\frac{p\pi}{m}$, nous obtenons l'expression

$$\text{(III)} \qquad 2\rho = a\frac{\cos\frac{q\pi}{n}}{\cos\frac{p\pi}{m}}\tang \mathrm{I}.$$

22. *Autre expression de ce rayon.* — Multiplions cette égalité, membre à membre, par la relation

$$\sin \mathrm{I} = \frac{\cos\frac{p\pi}{m}}{\sin\frac{q\pi}{n}}$$

du n° **12**; elle devient

$$2\rho\sin \mathrm{I} = a\frac{\cos\frac{q\pi}{n}}{\cos\frac{p\pi}{m}}\tang \mathrm{I}\frac{\cos\frac{p\pi}{m}}{\sin\frac{q\pi}{n}},$$

d'où nous tirons

$$2\rho = a\frac{\cot\frac{q\pi}{n}}{\cos \mathrm{I}}$$

ou

$$\text{(IV)} \qquad 2\rho = a\cot\frac{q\pi}{n}\,\text{séc}\,\mathrm{I}.$$

23. *Expressions trigonométriques des rayons r,* R *et ρ des trois sphères, en valeur de l'arête a des divers polyèdres réguliers.* — Dans les formules (I), (II) et (III), remplaçons n et q, m et p par les nombres entiers, qui conviennent à la suite des neuf polyèdres réguliers; puis mettons de même, à la place de tang I, ses équivalents trigonométriques, qui sont consignés au tableau du n° **18**. Nous obtiendrons des résultats, que nous pouvons réunir dans un même tableau, au moyen duquel il sera aisé de calculer les expressions numériques des trois rayons r, R et ρ en fonction de l'arête a.

POLYÈDRES RÉGULIERS.	VALEUR, EN FONCTION DE L'ARÊTE a, DE		
	$2r$.	$2R$.	2ρ.
Tétraèdre...........	$a\cot\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$.	$a\tang\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$.	$a\cos\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{4}:\cos\frac{\pi}{3}$.
Hexaèdre...........	$a\cot\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{2}$.	$a\tang\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{2}$.	$a\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{2}:\cos\frac{\pi}{3}$.
Octaèdre...........	$2a\cot\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$.	$2a\tang\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4}$.	$2a\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}:\cos\frac{\pi}{4}$.
Dodécaèdre convexe..	$2a\cot\frac{\pi}{5}\sin\frac{3\pi}{10}$.	$2a\tang\frac{\pi}{3}\sin\frac{3\pi}{10}$.	$2a\cos\frac{\pi}{5}\sin\frac{3\pi}{10}:\cos\frac{\pi}{3}$.
Icosaèdre convexe....	$4a\cot\frac{\pi}{3}\sin^2\frac{3\pi}{10}$.	$4a\tang\frac{\pi}{5}\sin^2\frac{3\pi}{10}$.	$4a\cos\frac{\pi}{3}\sin^2\frac{3\pi}{10}:\cos\frac{\pi}{5}$.
Dodécaèdre de Kepler à sommets pentaèdres...........	$2a\cot\frac{2\pi}{5}\sin\frac{3\pi}{10}$.	$2a\tang\frac{\pi}{5}\sin\frac{3\pi}{10}$.	$2a\cos\frac{2\pi}{5}\sin\frac{3\pi}{10}:\cos\frac{\pi}{5}$.
Dodecaèdre de Poinsot...............	$2a\cot\frac{\pi}{5}\sin\frac{\pi}{10}$.	$5a\tang\frac{2\pi}{5}\sin\frac{\pi}{10}$.	$2a\cos\frac{\pi}{5}\sin\frac{\pi}{10}:\cos\frac{2\pi}{5}$.
Dodécaèdre de Kepler à sommets trièdres.	$2a\cot\frac{2\pi}{5}\sin\frac{\pi}{10}$.	$2a\tang\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{10}$.	$2a\cos\frac{2\pi}{5}\sin\frac{\pi}{10}:\cos\frac{\pi}{3}$.
Icosaèdre de Poinsot.	$4a\cot\frac{\pi}{3}\sin^2\frac{\pi}{10}$.	$4a\tang\frac{2\pi}{5}\sin^2\frac{\pi}{10}$.	$4a\cos\frac{\pi}{3}\sin^2\frac{\pi}{10}:\cos\frac{2\pi}{5}$.

§ IV. — Volume des polyèdres réguliers convexes.

24. *Formule générale.* — Soient F le nombre des faces d'un polyèdre régulier convexe, et n le nombre des côtés de chaque face. Chacune des F faces est la base d'une pyramide régulière, ayant son sommet au centre O du polyèdre.

Le triangle ABC (*fig.* 8) est l'un des n triangles dont se compose la face, qui a son centre en C. La surface de cette face sera, par suite,

$$n\,.\,\mathrm{ABC} = n\,.\,\tfrac{1}{2}\mathrm{AB}\,.\,\mathrm{CI} = \tfrac{1}{2}na\,.\,\mathrm{CI}\,;$$

mais le triangle ACI donne

$$\mathrm{CI} = \mathrm{AI}\cot\mathrm{ACI} = \frac{1}{2}a\cot\frac{\pi}{n};$$

il vient donc

$$n.\,\mathrm{ABC} = \frac{1}{4} na^2 \cot\frac{\pi}{n}.$$

Puisque la hauteur OC de la pyramide régulière, qui a pour base $n.\mathrm{ABC}$ et pour sommet le centre O, est égale au rayon r de la sphère inscrite, le volume de cette pyramide sera

$$v = \frac{1}{12} na^2 r \cot\frac{\pi}{n}.$$

Le volume de notre polyèdre régulier est donc

$$\text{(I)} \qquad \mathrm{V} = \frac{1}{12} n\mathrm{F} a^2 r \cot\frac{\pi}{n}.$$

25. *Expressions diverses du volume d'un polyèdre regulier convexe.* — En faisant dans cette formule les substitutions convenables, on verra qu'on a aussi

$$\text{(II)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{V} &= \frac{1}{24} n\mathrm{F} a^3 \cot^2\frac{\pi}{n} \operatorname{tang} \mathrm{I}, \\ \mathrm{V} &= \frac{1}{3} n\mathrm{F} r^3 \operatorname{tang}\frac{\pi}{n} \cot^2 \mathrm{I}, \\ \mathrm{V} &= \frac{1}{3} n\mathrm{FR}^3 \cot^3\frac{\pi}{m} \cot^2\frac{\pi}{n} \cot^2 \mathrm{I}, \\ \mathrm{V} &= \frac{1}{6} n\mathrm{F} \rho^3 \operatorname{tang}\frac{\pi}{n} \sin 2\mathrm{I} \cos \mathrm{I}, \\ \mathrm{V} &= \frac{1}{3} n\mathrm{FR} r\rho \frac{\cos^2\frac{\pi}{m}}{\sin\frac{\pi}{m}\sin\frac{\pi}{n}} \cot^2 \mathrm{I}. \end{aligned} \right.$$

26. *Rapport des volumes de deux polyèdres réguliers convexes, qui sont conjugués et inscrits dans la même sphère.* — La dernière des formules (II), qu'il serait facile d'établir directement, nous permet de démontrer un théorème curieux, dans lequel intervient le rayon de la sphère tangente aux arêtes.

Lorsque deux polyèdres réguliers conjugués sont inscrits dans la même sphère, nous savons (nº **8**) qu'ils sont aussi circonscrits à une même sphère.

D'ailleurs le produit nF a aussi même valeur pour les deux polyèdres conjugués, s'ils sont convexes; car, si ce produit est $4.6 = 24$ pour l'hexaèdre, il sera $3.8 = 24$ pour l'octaèdre; de même, s'il est $5.12 = 60$ pour le dodécaèdre, il sera $3.20 = 60$ pour l'icosaèdre.

Cela posé, soient V et V' les volumes des deux polyèdres réguliers convexes et conjugués, qui sont inscrits dans la même sphère de rayon R; r le rayon de la sphère inscrite, qui est commune; ρ et ρ' les rayons des deux sphères tangentes aux arêtes; I et I' les demi-inclinaisons des faces adjacentes; n et m les nombres de côtés de leurs faces; F et F' les nombres de ces faces.

En vertu de la dernière des formules (II), nous avons

$$V = \frac{1}{3} n \, \mathrm{F R} \, r\rho \frac{\cos^2 \frac{\pi}{m} \cot^2 \mathrm{I}}{\sin \frac{\pi}{m} \sin \frac{\pi}{n}},$$

$$V' = \frac{1}{3} m \, \mathrm{F R} \, r\rho' \frac{\cos^2 \frac{\pi}{n} \cot^2 \mathrm{I}'}{\sin \frac{\pi}{n} \sin \frac{\pi}{m}};$$

divisant membre à membre et observant que $n\mathrm{F} = m\mathrm{F}'$, il vient

$$\frac{V}{V'} = \frac{\rho}{\rho'} \frac{\cos^2 \frac{\pi}{m} \cot^2 \mathrm{I}}{\cos^2 \frac{\pi}{n} \cot^2 \mathrm{I}'}.$$

Mais l'égalité (V) du n° **16** nous donne, en y faisant $p = 1, q = 1$,

$$\cos \frac{\pi}{m} \cot \mathrm{I} = \cos \frac{\pi}{n} \cot \mathrm{I}';$$

donc il reste

$$\frac{V}{V'} = \frac{\rho}{\rho'}.$$

On en conclut la proposition suivante :

THÉORÈME. — *Lorsque deux polyèdres réguliers, convexes et conjugués, sont inscrits dans la même sphère, leurs volumes sont entre eux comme les rayons des sphères tangentes aux arêtes des deux polyèdres.*

Résumé d'une Conférence sur la théorie mathématique de l'élasticité, faite aux élèves de l'École Polytechnique (promotion de 1877-1879).

PAR M. H. RESAL.

Nous considérerons comme étant connues toutes les notions physiques relatives à l'élasticité et à ses limites, ainsi que la définition de la pression dans l'intérieur d'un système moléculaire. Nous ne nous occuperons d'ailleurs que des corps homogènes, dont nous représenterons par D la densité à l'état naturel, c'est-à-dire lorsque ces corps sont soustraits à l'action de toute force extérieure.

Sommations qui représentent les composantes des pressions.

Soient Ox, Oy, Oz trois axes coordonnés rectangulaires, G le centre de gravité d'un élément superficiel $ab = d\omega$ compris dans un corps homogène et dont le plan est perpendiculaire à l'un des trois axes ci-dessus, à Oz si l'on veut, pour fixer les idées.

Pour nous, une molécule m sera située *au-dessous* du plan de $d\omega$, quand sa coordonnée parallèle à Oz sera inférieure à celle de G.

Désignons par m' une molécule située au-dessus de ab, telle que la droite $mm' = r$ traverse $d\omega$, et par $mm'f(r)$ l'action moléculaire exercée par m sur m'.

Considérons d'abord des couples de molécules m, m' comprises dans un cylindre ayant pour base $d\omega$ et dont les génératrices aient une direction déterminée.

Si nous admettons d'abord que r reste constant, nous aurons la résultante

$$m f(r) \mathrm{D}\, d\omega\, r \cos(r, z),$$

et il faudra faire la somme de toutes les expressions semblables, en faisant varier r depuis o jusqu'au rayon de la sphère d'activité.

Nous avons donc parallèlement à l'axe des x la composante de la pression

$$p_{zx} = \mathrm{D}\,\mathrm{Som}\, m f(r) r \cos(r, z) \cos(r, x).$$

La somme est relative à toutes les orientations d'un rayon partant de G, mais situé au-dessus de $d\omega$; mais cette somme est la moitié de celle que l'on obtiendrait en faisant tourner le rayon r dans tous les sens autour de G. En nous plaçant à ce nouveau point de vue, nous aurons

(1)
$$\left\{\begin{aligned} p_{zx} &= \frac{\mathrm{D}}{2}\,\mathrm{Som}\, m f(r) r \cos(r, z) \cos(r, x), \\ &\text{et de même} \\ p_{zy} &= \frac{\mathrm{D}}{2}\,\mathrm{Som}\, m f(r) r \cos(r, z) \cos(r, y), \\ p_{zz} &= \frac{\mathrm{D}}{2}\,\mathrm{Som}\, m f(r) r \cos^2(r, z). \end{aligned}\right.$$

D'après le mode de raisonnement que nous avons adopté, on voit que les choses se passent comme si, toutes les molécules m se trouvant placées en G, les molécules m' rayonnaient autour de ce point.

Soient x, y, z les coordonnées du point G, $x+h$, $y+k$, $z+l$ celles d'une molécule quelconque située dans la sphère d'activité de ce point. Nous avons

$$\cos(r, x) = \frac{h}{r}, \quad \cos(r, y) = \frac{k}{r}, \quad \cos(r, z) = \frac{l}{r},$$

et, en posant $\varphi(r) = \frac{f(r)}{r}$, les formules (1) deviennent

(2)
$$\left\{\begin{aligned} p_{zx} &= \frac{\mathrm{D}}{2}\,\mathrm{Som}\, m \varphi(r) l h, \\ p_{zy} &= \frac{\mathrm{D}}{2}\,\mathrm{Som}\, m \varphi(r) l k, \\ p_{zz} &= \frac{\mathrm{D}}{2}\,\mathrm{Som}\, m \varphi(r) l^2. \end{aligned}\right.$$

Ces expressions sont nulles lorsque le corps considéré est à l'état naturel, ce que nous supposerons dans ce qui suit.

Expression des pressions en fonction des déplacements.

Admettons que, sous l'action de forces extérieures, le point G éprouve un déplacement dont nous représenterons par u, v, w les projections sur Ox, Oy, Oz. Nous ne conserverons que les premières puissances de ces déplacements et de leurs dérivées partielles. L'élément de volume $dx\,dy\,dz$ est devenu

$$(dx + du)(dy + dv)(dz + dw) = dx\,dy\,dz\left(1 + \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right).$$

La dilatation cubique est ainsi

$$(3) \qquad \Delta = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}.$$

La densité dans la sphère d'activité de G est devenue

$$(4) \qquad D' = \frac{D}{1+\Delta} = D\left(1 - \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dy} - \frac{dw}{dz}\right).$$

Soient ∂h, ∂k, ∂l, ∂r les variations éprouvées par h, k, l, r. Nous aurons, par exemple,

$$p_{zx} = \frac{D'}{2}\,\text{som}\, m\varphi(r + \partial r)(l + \partial l)(h + \partial h)$$
$$= \frac{D'}{2}\,\text{Som}\, m\varphi(r)\,lh + \frac{D}{2}\,\text{Som}\, m[\varphi'(r)\,lh\,\partial r + \varphi(r)\,l\,\partial h + \varphi(r)\,h\,\partial l].$$

Or le premier terme de cette expression est nul avec les termes en ∂; il vient donc

$$(5) \qquad \begin{cases} p_{zx} = \dfrac{D}{2}\,\text{Som}\, m[\varphi'(r)\,lh\,\partial r + \varphi(r)(l\,\partial h + h\,\partial l)], \\ \text{et de même} \\ p_{zy} = \dfrac{D}{2}\,\text{Som}\, m[\varphi'(r)\,lk\,\partial r + \varphi(r)(l\,\partial k + k\,\partial l)], \\ p_{zz} = \dfrac{D}{2}\,\text{Som}\, m[\varphi'(r)\,l^2\,\partial r + 2\varphi(r)\,l\,\partial l]. \end{cases}$$

Mais ∂h notamment n'est autre chose que l'accroissement que prend u

quand on y remplace x, y, z par $x+h$, $y+k$, $z+l$; nous avons donc

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} \delta h &= \frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k + \frac{du}{dz}l, \\ &\text{et de même} \\ \delta k &= \frac{dv}{dx}h + \frac{dv}{dy}k + \frac{dv}{dz}l, \\ \delta l &= \frac{dw}{dx}h + \frac{dw}{dy}k + \frac{dw}{dz}l, \end{aligned}\right.$$

et enfin

$$(7)\quad \delta r = \frac{h\,\delta h + k\,\delta k + l\,\delta l}{r}.$$

Concevons que l'on substitue la valeur (7) dans les formules (5), puis les valeurs (6); on fera ensuite sortir $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}, \frac{dv}{dx}, \cdots$ des signes Som. Mais le calcul se simplifie notablement si l'on remarque que : 1° en raison de la symétrie, les sommes renfermant h, k, l à des puissances impaires sont nulles, puisqu'elles doivent avoir la même valeur en changeant les signes de ces variables; 2° d'après la troisième des équations (2), on a,

$$\text{Som}\, m\,\varphi(r)\,l^2 = 0;$$

par suite,

$$0 = \text{Som}\, m\,\varphi(r)\,h^2 = \text{Som}\, m\,\varphi(r)\,k^2 = \text{Som}\, m\,\varphi(r)\,l^2 = \text{Som}\, m\,\varphi(r)\,r^2 = 0.$$

Si l'on pose

$$\text{Som}\, m\frac{\varphi'(r)}{r}h^2l^2 = \text{Som}\, m\frac{\varphi'(r)}{r}h^2k^2 = \text{Som}\, m\frac{\varphi'(r)}{r}k^2l^2 = -\frac{2}{\text{D}}\mu,$$

$$\text{Som}\, m\frac{\varphi'(r)}{r}h^4 = \text{Som}\, m\frac{\varphi'(r)}{r}k^4 = \text{Som}\, m\frac{\varphi'(r)}{r}l^4 = -\frac{2}{\text{D}}\nu,$$

les quantités μ et ν étant deux constantes spécifiques, on trouve

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} p_{zx} &= -\mu\left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}\right), \\ p_{zy} &= -\mu\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right), \\ p_{zz} &= -\mu\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy}\right) - \nu\frac{dw}{dz}. \end{aligned}\right.$$

Il existe entre les constantes μ et ν une relation qui résulte de ce que leurs valeurs sont indépendantes du choix des coordonnées. Soient en effet α, β, γ les angles que forment avec Oz trois axes rectangulaires Ox', Oy', Oz', $\bar{h}'$, $\bar{k}'$, $\bar{l}'$ les projections sur ces trois axes de la somme géométrique $\bar{h}+\bar{k}+\bar{l}$; nous avons

$$l = h'\cos\alpha + k'\cos\beta + l'\cos\gamma,$$

$$(8')\quad \left\{\begin{aligned} \nu &= -\frac{2}{D}\operatorname{som}\varphi'(r)\,l^4 \\ &= \nu(\cos^4\alpha + \cos^4\beta + \cos^4\gamma) \\ &\quad + 6\mu(\cos^2\alpha\cos^2\beta + \cos^2\alpha\cos^2\gamma + \cos^2\beta\cos^2\gamma). \end{aligned}\right.$$

Or, de

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

on tire

$$\cos^4\alpha+\cos^4\beta+\cos^4\gamma = 1 - 2(\cos^2\alpha\cos^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\gamma+\cos^2\beta\cos^2\gamma).$$

En substituant cette valeur dans la formule (8′), on trouve

$$\nu = 3\mu\ [*];$$

nous avons donc finalement

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} p_{zx} &= -\mu\left(\frac{du}{dz}+\frac{dw}{dx}\right), \\ p_{zy} &= -\mu\left(\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}\right), \\ p_{zz} &= -\mu\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+3\frac{dw}{dz}\right). \end{aligned}\right.$$

Par une permutation de lettres, on obtiendra les valeurs des p_{xx}, p_{yy}, p_{xy}, et l'on reconnaîtra que les égalités $p_{xz} = p_{zx}, \ldots$ sont vérifiées.

---

[*] Cette relation, établie par Cauchy, puis par Poisson, a été contestée par Lamé, qui, aux notations près, admet que μ et ν sont indépendants. Mais les expériences récentes de M. Kirchhoff sur l'acier fondu et de M. Cornu sur le cristal ont démontré très-nettement que la restriction de Lamé devait être mise de côté quand il s'agit de corps isotropes.

Nous devons ajouter que des expériences faites indépendamment les unes des autres au Conservatoire des Arts et Métiers sur la traction et à la Société industrielle de Mulhouse sur la torsion confirment le résultat ci-dessus

En substituant les valeurs des pressions dans les équations d'équilibre intérieur résultant de la considération du parallélépipède élémentaire, on obtient trois équations aux différentielles partielles entre les inconnues u, v, w.

Les conditions relatives à la surface, où la pression est donnée en fonction de x, y, z ou plutôt en fonction de deux de ces coordonnées, en vertu de l'équation de cette surface, s'obtiendront par la considération du tétraèdre élémentaire.

Si au lieu de l'équilibre il y a mouvement, on remplacera dans les équations générales de l'élasticité X, Y, Z par $X - \frac{d^2u}{dt^2}$, $Y - \frac{d^2v}{dt^2}$, $Z - \frac{d^2w}{dt^2}$, et alors nous aurons des équations aux différentielles partielles entre quatre variables x, y, z, t.

Qu'il y ait équilibre ou mouvement, il n'y a que dans quelques cas particuliers que l'on peut effectuer l'intégration.

Revenons aux généralités. Considérons un corps sollicité par plusieurs groupes de forces (S), (S'), (S''),..., et supposons que les pressions sur sa surface forment également différents groupes (σ), (σ'), (σ''),..., en nombre égal aux précédents, ce qui peut toujours se faire en complétant par des zéros, s'il y a lieu, le groupe le moins nombreux. Les équations de l'équilibre intérieur relatives à la surface étant linéaires en u, v, w, il est clair que, si l'on satisfait aux équations ci-dessus en combinant deux à deux les groupes (S) et (σ), la solution du problème s'obtiendra en faisant la somme des u, v, w obtenus de cette manière.

Il résulte de là que, si des forces produisent simultanément une traction ou compression, une torsion et une flexion, il suffira d'étudier en particulier chacune des déformations, comme si elle se produisait indépendamment des autres.

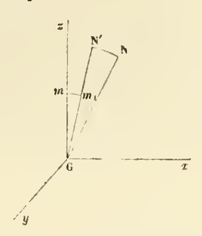
Interprétation géométrique des formules qui représentent les pressions intérieures.

Supposons que l'on transporte les coordonnées parallèlement à elles-mêmes au point G.

Si un point m primitivement situé sur Gz est venu en m_1, on a $h = 0$, $k = 0$, et la troisième des formules (G) donne

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\delta l}{l} = \frac{Gm_1 - Gm}{Gm}.$$

On voit ainsi pourquoi $\frac{dw}{dz}$ exprime une dilatation : nous représenterons cette dérivée partielle par δ_2.



Les coordonnées de m_1, parallèles à Ox, Oy, Oz ont pour expressions

$$\chi = \delta h = \frac{du}{dz} l,$$

$$\eta = \delta k = \frac{dv}{dz} l,$$

$$\zeta = l + \frac{dw}{dz} l.$$

Il résulte de là que, aux termes du second ordre près, on a pour les équations de la normale matérielle primitive, après la déformation,

(10) $$\chi = \frac{du}{dz}\zeta, \quad \eta = \frac{dv}{dz}\zeta.$$

Les coordonnées d'un point primitivement situé dans le plan de l'élément $d\omega$ ont pour valeurs, après la déformation,

$$\chi' = h + \delta h = h + \frac{du}{dx} h + \frac{du}{dy} k,$$

$$\eta' = k + \delta k = k + \frac{dv}{dx} h + \frac{dv}{dy} k,$$

$$\zeta' = \delta l = \frac{dw}{dx} h + \frac{dw}{dy} k,$$

d'où

$$\zeta' = \frac{dw}{dx}\chi' + \frac{dw}{dy}\eta',$$

pour l'équation du plan dans lequel se trouvaient primitivement les points matériels contenus dans $d\omega$.

Les équations de la normale GN à ce plan sont

$$(11) \qquad \chi' = -\frac{dw}{dx}\zeta', \quad \eta' = -\frac{dw}{dy}\zeta'.$$

Portons à partir de G sur les directions de Gm_1 et de GN des longueurs GN′, GN égales à l'unité; l'élément NN′ mesurera le *glissement*, c'est-à-dire l'angle compris sous la normale matérielle déformée et la normale à l'élément matériel déformé $d\omega$. Désignons par γ_z ce glissement et par γ_{zx} sa projection sur l'axe des x; nous avons

$$\gamma_{zx} = \chi - \chi',$$

d'où

$$\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx} = \gamma_{zx}.$$

D'après les considérations ci-dessus, on peut donc écrire

$$(12) \qquad \begin{cases} p_{zz} = -\mu(\delta_x + \delta_y + 3\delta_z), & p_{xx} = \ldots, \quad p_{yy} = \ldots, \\ p_{zx} = -\mu\gamma_{zx}, & p_{zy} = -\mu\gamma_{zy} \quad \ldots \end{cases}$$

De la traction. — Nous rappellerons que, si l'on représente par p' la pression exercée sur un élément dont la normale fait les angles α, β, γ avec les axes coordonnés Ox, Oy, Oz, on a

$$(A) \qquad \begin{cases} p'_x = p_{xx}\cos\alpha + p_{xy}\cos\beta + p_{xz}\cos\gamma, \\ p'_y = p_{yy}\cos\beta + p_{yx}\cos\alpha + p_{yz}\cos\gamma, \\ p'_z = p_{zz}\cos\gamma + p_{zx}\cos\alpha + p_{zy}\cos\beta. \end{cases}$$

Nous avons d'ailleurs, lorsque les molécules d'un corps isotrope ne sont sollicitées par aucune force extérieure,

$$(B) \qquad \begin{cases} \dfrac{dp_{xx}}{dx} + \dfrac{dp_{xy}}{dy} + \dfrac{dp_{xz}}{dz} = 0, \\ \dfrac{dp_{yx}}{dx} + \dfrac{dp_{yy}}{dy} + \dfrac{dp_{yz}}{dz} = 0, \\ \dfrac{dp_{zx}}{dx} + \dfrac{dp_{zy}}{dy} + \dfrac{dp_{zz}}{dz} = 0. \end{cases}$$

Considérons maintenant un prisme ou cylindre maintenu par une extrémité AB et dont l'autre extrémité CD est soumise à une traction uniformément répartie sur sa surface Ω. Soient Q la charge totale, Oz l'axe de la pièce, Ox, Oy deux axes rectangulaires compris dans le plan de AB.

On a pour la surface latérale $p' = 0$, $\gamma = 0$, $\beta = 90^\circ - \alpha$, par suite

$$(\mathrm{A}') \qquad \left\{ \begin{array}{l} p_{xx} \cos\alpha + p_{xy} \sin\alpha = 0, \\ p_{yx} \cos\alpha + p_{yy} \sin\alpha = 0, \\ p_{zx} \cos\alpha + p_{zy} \sin\alpha = 0, \end{array} \right.$$

et pour la section CD

$$(\mathrm{A}'_1) \qquad p_{zx} = 0, \quad p_{zy} = 0, \quad p_{zz} = -\frac{Q}{\Omega}.$$

Si nous admettons que $p_{xx} = 0$, $p_{yy} = 0$ et que les conditions (A'_1) soient satisfaites dans toute la masse, sauf vérification ultérieure, nous n'avons plus à nous occuper des équations (B) ; mais alors

$$3\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0,$$

$$3\frac{dv}{dy} + \frac{du}{dx} + \frac{dw}{dz} = 0,$$

d'où

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy} = -\frac{1}{4}\frac{dw}{dz},$$

or la troisième des formules (A'_1) donne

$$-\mu\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dy} + 3\frac{dw}{dz}\right) = -\frac{Q}{\Omega},$$

d'où

$$Q = \frac{5}{2}\mu\Omega\frac{dw}{dz} = \frac{5}{2}\mu\Omega\frac{\lambda}{l},$$

λ étant l'allongement éprouvé par la longueur l de la pièce.

Il suit de là que le coefficient de glissement μ est égal aux deux cinquièmes du coefficient d'élasticité E.

En nous reportant plus haut, nous voyons que le prisme éprouve

une contraction latérale $\delta_x = \delta_y = -\frac{\delta_z}{4}$ égale au quart de la dilatation longitudinale, résultat qu'une expérience de Caignard-Latour a confirmé.

Tout ce qui précède est applicable au cas où le prisme serait soumis à une compression.

De la torsion des prismes.

Considérons un corps prismatique ou cylindrique, censé vertical pour fixer les idées, maintenu par son extrémité supérieure et dans le plan de la base duquel on fait intervenir des forces continues assujetties à la seule condition de se réduire à un couple pour qu'elles ne produisent pas de flexion.

Soient O le point fixe de l'axe Oz de la pièce ; Ox, Oy deux droites rectangulaires comprises dans le plan horizontal du point O.

Suivant M. de Saint-Venant, dont nous suivrons à très-peu près l'analyse [*], la torsion est définie par un déplacement rotatoire de chaque section droite dans son plan (en négligeant d'abord la déformation de cette section), proportionnel à la distance z de la section au plan xOy.

Nous pouvons donc poser pour le point (x, y, z), et en désignant par ϑ une constante,

$$(1) \qquad u = \vartheta yz, \quad v = -\vartheta xz.$$

Conditions relatives à la surface latérale. — Nous avons $\gamma = 90°$, $\beta = 90° - \alpha$, et, en exprimant que la pression sur la surface latérale est nulle,

$$p_{xx}\cos\alpha + p_{xy}\sin\alpha = 0,$$
$$p_{zx}\cos\alpha + p_{yy}\sin\alpha = 0,$$
$$p_{zx}\cos\alpha + p_{zy}\sin\alpha = 0.$$

Les deux premières de ces conditions seront satisfaites si nous admettons, sous la réserve de justifications ultérieures, que l'on a dans

[*] *De la torsion des prismes*, 1855.

toute la masse

$$(2) \qquad p_{xx} = 0,$$

$$(3) \qquad p_{yy} = 0,$$

$$(4) \qquad p_{xy} = 0.$$

Soit

$$(5) \qquad f(x, y) = 0$$

l'équation du périmètre de la section droite; comme nous avons pour ce périmètre

$$\frac{dy}{dx} = -\cot\alpha = -\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}},$$

la troisième des conditions ci-dessus se réduit à

$$(6) \qquad p_{zx}\frac{df}{dx} + p_{zy}\frac{df}{dy} = 0.$$

Condition relative à la base. — Cette condition sera remplie si pour toutes les sections on a

$$(7) \qquad p_{zz} = 0,$$

ce que nous supposerons encore sous toutes réserves.

Équations de l'équilibre intérieur. — Si nous admettons qu'en un point quelconque de la pièce on ait

$$(8) \qquad \frac{dp_{xz}}{dz} = 0,$$

$$(9) \qquad \frac{dp_{yz}}{dz} = 0,$$

les équations de l'équilibre intérieur, eu égard aux formules (2), (3) et (4), se réduisent à la suivante :

$$(10) \qquad \frac{dp_{zx}}{dx} + \frac{dp_{zy}}{dy} = 0.$$

Déductions de l'hypothèse de la nullité de la pression sur un élément quelconque perpendiculaire à chacun des trois axes coordonnés. — Des équations (2), (3) et (7) on déduit

$$\frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} + 3\frac{du}{dx} = 0,$$

$$\frac{du}{dx} + \frac{dw}{dz} + 3\frac{dv}{dy} = 0,$$

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + 3\frac{dw}{dz} = 0,$$

d'où

$$\frac{du}{dx} = 0, \quad \frac{dv}{dy} = 0,$$

$$(7') \qquad \frac{dw}{dz} = 0.$$

Les deux premières de ces conditions étant satisfaites par les valeurs (1), il n'y a plus lieu de nous en occuper, et il en est de même des formules (2) et (3).

Dernières conditions. — L'équation (4), qui revient à la suivante,

$$\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} = 0,$$

étant également vérifiée par les valeurs (1), doit être mise aussi de côté.

Nous avons maintenant

$$(11) \qquad \begin{cases} p_{zx} = -\mu\left(\dfrac{du}{dz} + \dfrac{dw}{dx}\right) = -\mu\left(\theta y + \dfrac{dw}{dx}\right), \\ p_{zy} = -\mu\left(\dfrac{dv}{dz} + \dfrac{dw}{dy}\right) = \mu\left(\theta x - \dfrac{dw}{dy}\right). \end{cases}$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (10), on trouve

$$(12) \qquad \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d^2 w}{dy^2} = 0.$$

Résumé des formules. — On voit, par ce qui précède, que le problème de la torsion d'un prisme se ramène à la considération des

formules suivantes :

$$(7') \qquad \frac{dw}{dz} = 0,$$

$$(12) \qquad \frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2} = 0,$$

$$(11) \qquad \begin{cases} p_{zx} = -\mu\left(\theta y + \dfrac{dw}{dx}\right), \\ p_{zy} = \mu\left(\theta x - \dfrac{dw}{dy}\right), \end{cases}$$

$$(5) \qquad f(x, y) = 0,$$

$$(6) \qquad \left(\theta y + \frac{dw}{dx}\right)\frac{df}{dx} + \left(-\theta x + \frac{dw}{dy}\right)\frac{df}{dy} = 0,$$

les deux dernières étant relatives au périmètre.

Soit $d\omega$ un élément de la base du prisme ayant pour coordonnées x, y; pour que les forces de torsion se réduisent à un couple, comme nous l'avons admis dès le début, il faut que l'on ait

$$\int p_{zx}\,d\omega = 0, \quad \int p_{zy}\,d\omega = 0.$$

ou

$$(13) \qquad \int \frac{dw}{dx}\,d\omega = 0, \quad \int \frac{dw}{dy}\,d\omega = 0,$$

conditions auxquelles on devra encore satisfaire.

Supposons que le problème soit résolu ou que l'on ait obtenu w en fonction de x et y, et désignons par $\mathfrak{M}$ le moment de torsion $\int p_{zy} x\,d\omega - \int p_{zx} y\,d\omega$, qui est censé donné; nous aurons, eu égard aux formules (11), pour déterminer θ, la relation

$$(14) \qquad \mathfrak{M} = \mu\left[\theta \int (x^2 + y^2)\,d\omega + \int \left(\frac{dw}{dx} y - \frac{dw}{dy} x\right) d\omega\right].$$

Quoique ce qui précède suppose que les forces $p_{zx}\,d\omega$, $p_{zy}\,d\omega$ qui produisent la torsion doivent être réparties sur la base suivant une loi qui doit résulter de la solution du problème, il est inutile de s'arrêter à cette restriction lorsque l'on passe du domaine de la théorie pure dans celui des applications, car, comme Lamé l'a fait judicieusement remarquer, en s'appuyant sur l'expérience, les effets de la torsion deviennent indépendants du mode de distribution des forces extérieures

à une très-petite distance de leurs points d'application et ne dépendent, en définitive, que du moment de torsion.

Application au cylindre elliptique.

Soient Ox, Oy les directions des axes principaux $2a$, $2b$ du profil elliptique ;

$$(a)\qquad f(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

l'équation de ce profil.

La formule (6) devient

$$(b)\qquad \left(\theta y + \frac{dw}{dx}\right) b^2 x + \left(-\theta x + \frac{dw}{dy}\right) a^2 y = 0,$$

et sera évidemment vérifiée d'une manière générale par une valeur de w proportionnelle à xy. On trouve ainsi

$$(c)\qquad w = \theta\,\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\,xy,$$

et, comme cette valeur satisfait aux formules (7') et (12), on voit qu'elle donne la solution du problème.

Avant d'aller plus loin, nous ferons remarquer que, d'après la formule (c), les sections droites d'un cylindre circulaire restent planes après la déformation, mais que, dans le cas de l'ellipse, chacune de ces sections devient un segment d'un paraboloïde hyperbolique. On voit également que, dans deux angles droits adjacents déterminés par les axes, il se produit une saillie et un creux.

Les formules (11) deviennent

$$(d)\qquad \begin{cases} p_{zx} = -\,2\mu\theta\,\dfrac{a^2}{a^2 + b^2}\,y, \\[2mm] p_{zy} = \,2\mu\theta\,\dfrac{b^2}{a^2 + b^2}\,x, \end{cases}$$

valeurs qui satisfont bien aux conditions (13), car il est visible que les $p_{zx}\,d\omega$, $p_{zy}\,d\omega$ forment deux à deux des couples.

Enfin on déduit facilement des formules (d), eu égard aux valeurs connues des moments principaux d'inertie de l'ellipse,

$$\mathfrak{M} = \pi\mu\tau \frac{a^3 b^3}{a^2 - b^2}.$$

Les maxima des valeurs absolues de p_{zx}, p_{zy} correspondant respectivement à $y = b$ et à $x = a$, on voit que la plus grande valeur de la composante de glissement est développée aux sommets du petit axe de chaque section, qui sont ainsi les points dangereux, résultat complètement opposé à celui que l'on déduit de la résistance des matériaux.

De la flexion d'un prisme.

Considérons un corps prismatique dont la longueur est a, fixé horizontalement par une extrémité, et tel que le plan vertical $x\mathrm{O}y$ passant par son axe $\mathrm{O}x$ soit un plan de symétrie.

Soient

$\mathrm{O}z$ la perpendiculaire en O au plan $x\mathrm{O}y$;

P la résultante des forces verticales qui sont censées uniformément réparties sur la base libre de la pièce;

OA la forme que prend l'axe du prisme sous l'influence de la force P;

Ω la section droite de ce prisme;

I son moment d'inertie par rapport à une parallèle $\mathrm{G}z$ à $\mathrm{O}z$ menée par son centre de gravité G'.

Conditions relatives à la surface latérale. — Nous avons ici

$$\alpha = 90^\circ, \quad \gamma = 90^\circ - \beta$$

et

(A) $$p_{xy}\cos\beta + p_{xz}\sin\beta = 0,$$

(a) $$\begin{cases} p_{yy}\cos\beta + p_{yz}\sin\beta = 0, \\ p_{zy}\cos\beta + p_{zz}\sin\beta = 0 \end{cases}$$

Les conditions (a) seront satisfaites si dans la masse on a

(1) $$p_{yy} = 0, \quad p_{zz} = 0,$$

(1) $$p_{yz} = 0.$$

comme nous le supposerons dans ce qui suit, sauf à établir ultérieurement les conditions qu'il faut remplir pour qu'il en soit ainsi.

Les équations de l'équilibre intérieur se réduisent alors aux suivantes :

(2) $$\frac{dp_{xx}}{dx} + \frac{dp_{xy}}{dx} + \frac{dp_{xz}}{dz} = 0,$$

(2') $$\frac{dp_{yx}}{dx} = 0,$$

(2") $$\frac{dp_{zx}}{dz} = 0.$$

Les équations (1) se réduisent aux suivantes :

$$\partial_x + 3\partial_y + \partial_z = 0,$$
$$\partial_x + \partial_y + 3\partial_z = 0,$$

d'où

(3) $$\partial_y = \partial_z = -\frac{\partial_x}{4}$$

et

(4) $$p_{xx} = -\mu(\partial_y + \partial_z + 3\partial_x) = -\tfrac{5}{2}\mu\partial_x.$$

Hypothèses. — Pour chercher à faire cadrer la théorie mathématique de l'élasticité avec la théorie de la résistance des matériaux, nous poserons

$$\partial_x = A_0 + A_1 y,$$

formule dans laquelle A_0, A_1 désignent deux constantes.

La condition $\int p_{xx}\,d\omega$ donne $A_0 = 0$, d'où il suit que l'axe de la pièce n'éprouve pas de dilatation, que sa longueur n'a pas varié, d'où sa dénomination d'*axe neutre*.

Le moment total des $p_{xx}\,d\omega$, pris dans le sens de la flexion, donne la relation

$$-\int p_{xx}\,y\,d\omega = -\tfrac{5}{2}\mu A_1 I = P(a - x),$$

d'où

(b) $$A_1 = -\frac{2}{5}\frac{P(a - x)}{\mu I}$$

et

$$(5)\qquad \delta_x = \frac{du}{dx} = -\frac{2}{5}\frac{P(a-x)}{\mu I}y.$$

En désignant par $f(y, z)$ une fonction arbitraire de y et z, cette dernière équation donne

$$(6)\qquad u = -\frac{2P}{5\mu I}\left[\left(a - \frac{x}{2}\right)yx + f(y, z)\right].$$

Avant d'aller plus loin, nous ferons remarquer que A_1 n'est autre chose que $\frac{d^2u}{dx\,dy}$. Or, en remplaçant dans la formule (2′) la pression p_{yx} par sa valeur en fonction des déplacements, on trouve

$$\frac{d^2u}{dx\,dy} = -\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{1}{\rho},$$

ρ représentant le rayon de courbure à la distance x de O pour toutes les files de molécules parallèles à Ox.

Quoique ce résultat ne soit pas d'accord avec la théorie de la résistance des matériaux, la formule (b) nous donne néanmoins le résultat connu

$$\frac{EI}{\rho} = P(a - x).$$

La double équation (3), eu égard à la valeur (5), donne

$$(c)\qquad \begin{cases} \dfrac{dv}{dy} = \dfrac{P}{10\mu I}(a-x)y, \\[2ex] \dfrac{dw}{dz} = \dfrac{P}{10\mu I}(a-x)y, \end{cases}$$

d'où

$$(d)\qquad v = \frac{P}{20\mu I}(a-x)y^2 + \varphi(x, z),$$

$$(d')\qquad w = \frac{P}{10\mu I}(a-x) + \psi(x, y).$$

Mais, en raison de la symétrie, w doit seulement changer de signe avec z, de sorte que la formule (d') se réduit à la suivante :

$$(7)\qquad w = \frac{P}{10\mu I}(a-x)yz.$$

La relation (1′) donne

$$\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} = 0,$$

ou

$$\frac{d\varphi(x, z)}{dz} = -\frac{P}{10\mu I}(a - x)z,$$

et enfin

$$\varphi(x, z) = -\frac{P}{20\mu I}(a - x)z^2 + \chi(x),$$

en introduisant une nouvelle fonction arbitraire $\chi(x)$.

La formule (d) devient ainsi

$$v = \frac{P}{20\mu I}(a - x)(y^2 - z^2) + \chi(x).$$

Or l'équation (2′) revient à la suivante,

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dx\,dy} = 0,$$

d'où

$$\frac{d^2\chi}{dx^2} = \frac{2P}{5\mu I}(a - x),$$

et enfin, en représentant par k et h deux constantes,

$$(8) \qquad v = \frac{P}{\mu I}\left[\frac{1}{20}(a - x)(y^2 - z^2) + \frac{x^2}{5}\left(a - \frac{x}{3}\right) + kx + h\right].$$

Nous avons donc, en résumé,

$$(9) \qquad \left\{\begin{aligned} p_{xx} &= \frac{P(a - x)y}{I}, \quad p_{yy} = 0, \quad p_{zz} = 0, \quad p_{yz} = 0, \\ p_{yx} &= \frac{P}{I}\left(\frac{2}{5}\frac{df}{dy} + \frac{y^2 - z^2}{20} - k\right), \\ p_{zx} &= \frac{P}{I}\left(\frac{2}{5}\frac{df}{dz} + \frac{1}{10}yz\right). \end{aligned}\right.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (2), on trouve la suivante

$$(e) \qquad \frac{d^2 f}{dy^2} + \frac{d^2 f}{dz^2} = 2y,$$

qui est satisfaite par

$$(10)\quad \begin{cases} f(y,z) = \dfrac{y^3}{3} + \dfrac{5}{2}\Sigma\cos m\,(z+\varepsilon)(\mathrm{M}e^{my} + \mathrm{N}e^{-my}), \\ \qquad + \dfrac{5}{2}\Sigma\cos m'(y+\varepsilon')(\mathrm{M}'e^{m'z} + \mathrm{N}'e^{-m'z}), \end{cases}$$

M, N, m, ε, M', N', m', ε' étant des constantes arbitraires.

Cette expression doit être considérée comme l'intégrale générale de l'équation (e), puisque sous les signes Σ elle renferme deux fonctions arbitraires.

Mais comme u, par suite $f(y,z)$, ne doit pas changer quand on y remplace z par $-z$, la formule (10) doit se réduire à la suivante :

$$(10')\quad \begin{cases} f(y,z) = \dfrac{y^3}{3} + \dfrac{5}{2}\Sigma\cos mz(\mathrm{M}e^{my} + \mathrm{N}e^{-my}) \\ \qquad + \dfrac{5}{2}\Sigma\mathrm{M}'\cos m'(y+\varepsilon')(e^{m'z} + e^{-m'z}). \end{cases}$$

Enfin, en nous reportant aux formules (9), nous devons conclure que M' est nul, puisque p_{zx} doit seulement changer de signe avec z. Nous avons donc

$$(11)\quad \begin{cases} p_{yx} = \dfrac{\mathrm{P}}{\mathrm{I}}\left[\dfrac{7}{5}y^2 - \dfrac{z^2}{20} - k + \Sigma m\cos mz(\mathrm{M}e^{my} - \mathrm{N}e^{-my})\right], \\ p_{zx} = \dfrac{\mathrm{P}}{\mathrm{I}}\left[\dfrac{yz}{10} - \Sigma m\sin mz(\mathrm{M}e^{my} + \mathrm{N}e^{-my})\right]. \end{cases}$$

Équation à laquelle doit satisfaire le périmètre pour que les hypothèses que nous avons faites soient admissibles.

L'équation (A) donne pour le périmètre de la section droite, en remarquant que $\dfrac{dy}{dz} = -\cot\beta$,

$$(12)\quad \frac{dy}{dz} = \frac{\dfrac{yz}{10} - \Sigma m\sin mz(\mathrm{M}e^{my} + \mathrm{N}e^{-my})}{\dfrac{7}{5}y^2 - \dfrac{z^2}{20} - k + \Sigma m\cos mz(\mathrm{M}e^{my} - \mathrm{N}e^{-my})}.$$

et l'on a bien $\frac{dy}{dz} = 0$ pour $z = 0$, comme cela devait être, en raison de la symétrie.

L'intégration de cette équation, en admettant qu'elle puisse s'effectuer pour des valeurs spéciales de M, N, m, introduira une dernière constante arbitraire, que nous désignerons par c.

Mais il faut aussi que les arbitraires satisfassent aux conditions

$$(13) \qquad \int\int y \, dz \, dy = 0,$$

$$(14) \qquad \int\int p_{xy} \, dz \, dy = P,$$

les intégrales s'étendant à toute la section droite du prisme : ainsi donc on n'a que deux conditions auxquelles doivent satisfaire c, k, et les M, N et m.

Deuxième solution du problème au moyen de fonctions algébriques [*].

L'équation

$$\frac{d^2 f}{dy^2} + \frac{d^2 f}{dz^2} = 2y$$

a pour intégrale générale

$$f = \frac{y^3}{3} + F(y + iz) + F_1(y - iz),$$

i représentant le symbole $\sqrt{-1}$ et F et F_1 deux fonctions arbitraires.

Développons les fonctions F et F_1 suivant les puissances ascendantes de z, et posons

$$F(y) + F_1(y) = \varphi(y),$$
$$i[F'(y)] - F'_1(y) = \psi(y);$$

[*] Cet article n'est qu'un Appendice, attendu que dans la limite du temps assigné à la Conférence il n'a pu être développé. R.

les fonctions arbitraires φ et ψ étant substituées à F et F_1; nous trouvons

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} f &= \frac{y^3}{3} + \varphi + \Sigma_1 \frac{(-1)^n}{1.2.3\ldots 2n} \frac{d^{2n}\varphi}{dy^{2n}} z^{2n} \\ &\quad + z\psi + \Sigma_1 \frac{(-1)^n}{1.2.3\ldots(2n+1)} \frac{d^{2n}\psi}{dy^{2n}} z^{2n+1}, \end{aligned}\right.$$

n étant un nombre entier positif dont la limite inférieure est l'unité

Cette formule est surtout applicable au cas où l'on admet que φ et ψ sont des fonctions algébriques de y.

Si, comme dans le cas particulier du problème de la flexion que nous avons étudié et que nous ne perdons pas de vue, la fonction f est paire en z, on doit avoir $\psi = 0$, et par suite

$$(16)\quad f = \frac{y^3}{3} + \varphi + \Sigma_1 \frac{(-1)^n}{1.2.3\ldots 2n} \frac{d\varphi^{2n}}{dy^{2n}} z^{2n}.$$

Les deux dernières des équations (9) deviennent alors, en remplaçant φ par $\frac{5}{2}\varphi$,

$$p_{yx} = \frac{P}{I}\left[\frac{9}{20}y^2 - \frac{z^2}{20} - k + \frac{d\varphi}{dy} + \Sigma_1 \frac{(-1)^n}{1.2.3\ldots 2n} \frac{d^{2n+1}\varphi}{dy^{2n+1}} z^{2n}\right],$$

$$p_{zx} = \frac{P}{I}\left[\frac{1}{10}yz + \Sigma_1 \frac{(-1)^n}{1.2.3\ldots 2n} \frac{1}{2n} \frac{d^{2n}\varphi}{dy^{2n}} z^{2n-1}\right].$$

Enfin, au lieu de l'équation (12) représentant l'équation différentielle du profil, nous avons la suivante,

$$(12'')\quad \frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{1}{10}yz + \Sigma_1 \dfrac{(-1)^n}{1.2.3\ldots 2n} \dfrac{1}{2n} \dfrac{d^{2n}\varphi}{dy^{2n}} z^{2n-1}}{\dfrac{9}{20}y^2 - \dfrac{z^2}{20} - k + \dfrac{d\varphi}{dy} + \Sigma_1 \dfrac{(-1)^n}{1.2.3\ldots 2n} \dfrac{d^{2n+1}\varphi}{dy^{2n+1}} z^{2n}},$$

qui satisfait bien à la condition de $\frac{dy}{dx} = 0$ pour $z = 0$.

Supposons, par exemple, que, A représentant une constante, on ait

$\varphi = Ay^3$; on trouve, en remplaçant la constante arbitraire k par $\frac{k}{20}$.

$$\frac{dy}{dz} = \frac{2yz(1-15A)}{3y^2(3+20A)-z^2(1+60A)-k},$$

équation qui s'intègre facilement dans chacun des cas où $k=0$, $3+20A=0$, $1+60A=0$.

Il nous paraît inutile d'insister sur ce point que toute solution qui ne comporte pas un périmètre limité n'est pas admissible.

Mémoire sur les équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre à une seule fonction inconnue;

PAR M. H. LAURENT.

I.

Dans ce Mémoire, je me propose de faire connaître une nouvelle méthode pour l'intégration d'un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre à une seule fonction inconnue.

Étant donné un pareil système, il n'admet pas toujours une solution. Bour, en suivant l'analyse développée par Jacobi pour l'intégration d'une équation unique, a fait voir (XXXIXe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*) que, lorsque certaines conditions dites d'*intégrabilité complète* étaient remplies, le système admettait une solution renfermant un nombre de constantes arbitraires égal à $m - n + 1$, m désignant le nombre des variables dont dépend la fonction inconnue, et n le nombre des équations du système. Cette solution est ce que l'on appelle une *solution complète;* quand un système possède une solution complète, on dit qu'il est *complétement intégrable.*

Par la méthode de la variation des constantes, on peut déduire de l'intégrale complète toutes les autres solutions du système, à savoir : une solution renfermant une fonction arbitraire qui dépend de n variables et que l'on appelle la *solution générale,* et d'autres solutions, moins générales, que l'on appelle *solutions singulières*. Bour a également fait voir que, quand les conditions d'intégrabilité complète ne sont pas satisfaites, le système peut néanmoins admettre une solution; cette

solution, quand elle existe, est la solution complète d'un nouveau système renfermant, outre les équations proposées, de nouvelles équations que l'analyse de Bour apprend à y adjoindre. Dans ce qui va suivre, il ne sera question que de systèmes complétement intégrables.

L'analyse développée dans ce Mémoire reposant sur la théorie des équations simultanées aux différences totales du premier ordre, je crois utile de résumer cette théorie.

Le système

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} dx_1 = X_{11}dt_1 + X_{12}dt_2 + \ldots + X_{1n}dt_n, \\ dx_2 = X_{21}dt_1 + X_{22}dt_2 + \ldots + X_{2n}dt_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ dx_m = X_{m1}dt_1 + X_{m2}dt_2 + \ldots + X_{mn}dt_n, \end{array}\right.$$

dans lequel les X_{ij} sont des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_m, t_1, t_2, \ldots, t_n$, peut être considéré comme définissant m fonctions $x_1, x_2, \ldots, x_m$ de $t_1, t_2, \ldots, t_n$; il est alors équivalent au système des équations dont le type est

$$\frac{dx_i}{dt_j} = X_{ij}.$$

On dit que le système (1) est aux différentielles totales. Pour que ce système admette une solution, il est nécessaire que les seconds membres des équations (1) soient des différentielles exactes quand on y suppose les x remplacées par les fonctions de $t_1, t_2, \ldots, t_n$ qui sont précisément les inconnues de ces équations; il faut donc que l'on ait en général, quels que soient i, j, k,

$$\frac{dX_{ik}}{dt_j} = \frac{dX_{ij}}{dt_k},$$

la lettre d, employée comme caractéristique différentielle, indiquant que l'on regarde les t comme seules variables indépendantes, les x devant être considérés comme fonctions des t. Cette formule peut s'écrire

$$\frac{\mathrm{d}X_{ik}}{\mathrm{d}t_j} + \sum_\mu \frac{\mathrm{d}X_{ik}}{\mathrm{d}x_\mu}\frac{dx_\mu}{dt_j} = \frac{\mathrm{d}X_{ij}}{\mathrm{d}t_k} + \sum_\mu \frac{\mathrm{d}X_{ij}}{\mathrm{d}x_\mu}\frac{dx_\mu}{dt_k}.$$

Mais, si les équations (1) sont satisfaites, cette dernière sera satisfaite

en remplaçant $\frac{dx_\mu}{dt_j}$ et $\frac{dx_\mu}{dt_k}$ par $X_{\mu j}$ et $X_{\mu k}$: si donc les formules (1) sont satisfaites, il est nécessaire que l'on ait

$$(2) \qquad \frac{dX_{ik}}{dt_j} + \sum_\mu \frac{dX_{ik}}{dx_\mu} X_{\mu j} = \frac{dX_{ij}}{dt_\mu} + \sum_\mu \frac{dX_{ij}}{dX_\mu} X_{\mu k}.$$

Cette condition, nécessaire pour que le système (1) admette une solution, est suffisante. Cette proposition a été établie par M. Méray dans son *Précis d'Analyse*, et par M. Bouquet dans le *Bulletin des Sciences mathématiques;* mais les démonstrations données par ces deux auteurs reposent sur l'emploi des séries et ne s'appliquent qu'à des fonctions X_{ij} dans lesquelles on peut supposer les variables imaginaires; d'ailleurs il resterait à montrer comment on peut effectuer l'intégration sans avoir recours aux séries. Dans les *Mathematischen Annalen,* t. V, et le *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. XI, M. Mayer a prouvé que les conditions (2) étaient toujours suffisantes, en montrant comment on pouvait intégrer alors le système (1). L'analyse de M. Mayer repose sur un théorème de M. Liouville; il m'a semblé que l'on pouvait éviter l'emploi de ce théorème et simplifier, au point de vue didactique, comme il suit l'exposition de M. Mayer.

Que le système (1) soit ou ne soit pas intégrable, on pourra toujours intégrer le système d'équations ordinaires

$$(a) \qquad \frac{dx_1}{dt_1} = X_{11}, \quad \frac{dx_2}{dt_1} = X_{21}, \quad \ldots, \quad \frac{dx_n}{dt_1} = X_{m1},$$

en y considérant $t_2, t_3, \ldots, t_n$ comme des constantes et en prenant pour constantes d'intégration les valeurs $x_1^0, x_2^0, \ldots$ de $x_1, x_2, \ldots$ pour $t_1 = t_1^0$. Si le système (1) admet une solution, il est clair qu'on l'obtiendra en choisissant convenablement $x_1^0, x_2^0, \ldots$ dans les expressions de $x_1, x_2, \ldots$ fournies par les intégrales de (a). Ces constantes devront être telles que l'on ait encore

$$(a') \qquad \frac{dx_1}{dt_2} = X_{21}, \quad \ldots, \quad \frac{dx_i}{dt_j} = X_{ij}, \quad \ldots;$$

les intégrales de (a) étant résolues par rapport à $x_1^0, x_2^0, \ldots$, différen-

tions-les, nous aurons des équations telles que

$$dx_\mu^0 = \left(\frac{dx_\mu^0}{dt_1} + \sum_i \frac{dx_\mu^0}{dx_i}\frac{dx_i}{dt_1}\right)dt_1 + \left(\frac{dx_\mu^0}{dt_2} + \sum_i \frac{dx_\mu^0}{dx_i}\frac{dx_i}{dt_2}\right)dt_2 + \ldots;$$

or $\frac{dx_i}{dt_1}$ est égal, en vertu de (a), à X_{i1}, et, à cause que x_μ^0 est une intégrale de (a), le coefficient de dt_1 dans cette formule est nul, et l'on a

$$(b) \qquad \frac{dx_\mu^0}{dt_1} + \sum_i \frac{dx_\mu^0}{dx_i} X_{i1} = 0;$$

la formule précédente se réduit à

$$dx_\mu^0 = \left(\frac{dx_\mu^0}{dt_2} + \sum_i \frac{dx_\mu^0}{dx_i}\frac{dx_i}{dt_2}\right)dt_2 + \left(\frac{dx_\mu^0}{dt_3} + \sum_i \frac{dx_\mu^0}{dx_i}\frac{dx_i}{dt_3}\right)dt_3 + \ldots.$$

Si l'on veut que les équations (a') soient satisfaites, il faudra que cette formule ait encore lieu quand à $\frac{dx_i}{dt_j}$ on substituera X_{ij}; on obtiendra ainsi un système d'équations aux différentielles totales à $n-1$ variables

$$(c) \quad dx_\mu^0 = \left(\frac{dx_\mu^0}{dt_2} + \sum_i \frac{dx_\mu^0}{dx_i} X_{i2}\right)dt_2 + \left(\frac{dx_\mu^0}{dt_3} + \sum_i \frac{dx_\mu^0}{dx_i} X_{i3}\right)dt_3 + \ldots,$$

de sorte que, si le système (1) est intégrable, les quantités $x_1^0, x_2^0, \ldots$ seront données par les équations (c). Je vais prouver que, si les conditions (2) sont satisfaites identiquement, les formules (c) ne contiendront pas t_1. En effet, désignons par G le coefficient de dt_2 par exemple. Nous avons, en ayant égard aux équations (a),

$$(p) \quad \left\{\begin{aligned} \frac{dG}{dt_1} = \frac{d^2x_0}{dt_1\,dt_2} + \sum_j \frac{d^2x_\mu^0}{dt_2\,dx_j} X_{j1} &+ \sum_i \left[\frac{d^2x_\mu^0}{dt_1\,dx_i} + \sum_j \frac{d^2x_\mu^0}{dx_i\,dx_j} X_{j1}\right] X_{i2} \\ &+ \sum_i \left[\frac{dX_{i2}}{dt_1} + \sum_j \frac{dX_{i2}}{dx_j} X_{j1}\right]\frac{dx_\mu^0}{dx_i}; \end{aligned}\right.$$

d'un autre côté, en désignant pour un instant par E le premier membre de la formule (b), qui est identiquement nul, on a identiquement

$$\frac{dE}{dt_2} + \frac{dE}{dx_1}X_{12} + \frac{dE}{dx_2}X_{22} + \ldots + \frac{dE}{dx_m}X_{m2} = 0;$$

en remplaçant E par sa valeur (b), on obtient l'identité suivante :

$$(q)\quad \left\{\begin{aligned} o = \frac{d^2 x_\mu^0}{dt_1\, dt_2} &+ \sum_j \frac{d^2 x_\mu^0}{dx_j\, dt_2} X_{j1} + \sum_i \frac{dx_\mu^0}{dx_i} \frac{dX_{i1}}{dt_2} \\ &+ \sum_i \left(\frac{d^2 x_\mu^0}{dt_1\, dx_i} + \sum_j \frac{d^2 x_\mu^0}{dx_i\, dx_j} X_{j1} \right) X_{i2} \\ &+ \sum_i \sum_j \frac{dx_\mu^0}{dx_j} \frac{dX_{j1}}{dx_i} X_{i2}. \end{aligned}\right.$$

Si l'on a alors égard aux formules (2), les deux équations (p) et (q) donnent par soustraction

$$\frac{dG}{dt_1} = o,$$

ce qui montre bien que les formules (c) ne contiennent pas t_1.

Cela posé, pour que le système (1) soit intégrable, il faut que l'on puisse satisfaire aux équations (a') à l'aide des intégrales du système (a). Ces intégrales étant résolues par rapport à $x_1, x_2, \ldots$, on en déduit

$$(d)\quad \left\{\begin{aligned} dx_1 &= \frac{dx_1}{dt_1} dt_1 + \frac{dx_1}{dt_2} dt_2 + \ldots + \frac{dx_1}{dx_1^0} dx_1^0 + \frac{dx_1}{dx_2^0} dx_2^0 + \ldots \\ dx_2 &= \ldots \end{aligned}\right.$$

$\Bigl(\frac{dx_1}{dt_1}$ désigne la dérivée de x_1 considéré comme fonction de $x_1^0, x_2^0, \ldots,$ $t_1, t_2, \ldots$; il ne faut pas la confondre avec la dérivée $\frac{dx_1}{dt_1}$ qui est prise en faisant varier les t partout$\Bigr)$. Mais on doit avoir

$$dx_1 = \frac{dx_1}{dt_1} dt_1 + \frac{dx_1}{dt_2} dt_2 + \ldots$$

ou, ce qui revient au même, puisque les formules (a') ou (1) doivent avoir lieu,

$$dx_1 = X_{11} dt_1 + X_{12} dt_2 + \ldots,$$

et, par suite, (d) deviendra

$$\left(\frac{dx_1}{dt_1} - X_{11}\right) dt_1 + \left(\frac{dx_1}{dt_2} - X_{12}\right) dt_2 + \ldots + \frac{dx_1}{dx_1^0} dx_1^0 + \frac{dx_1}{dx_2^0} dx_2^0 + \ldots = o,$$

. . . .

Ces équations sont sous une autre forme les équations (d) : elles ne contiennent donc pas t, et l'on peut y faire $t_1 = t_1^0$; mais alors elles deviennent

$$(3)\quad \begin{cases} dx_1^0 = X_{12}^0\, dt_2 + X_{13}^0\, dt_3 + \ldots + X_{1n}^0\, dt_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Réciproquement, si ces équations (3) peuvent être satisfaites, elles expriment que $dx_1, dx_2, \ldots$ tirés des intégrales de (a) peuvent être identifiés avec les $dx_1, dx_2 \ldots$ tirés de (1), et par suite, si le système (3) est intégrable, le système (1) l'est aussi.

Supposons le nombre des variables t égal à deux, dans le système (3) le nombre des variables t sera égal à un. Donc, dans ce cas, le système (3) est intégrable, et, quand les formules (2) ont lieu, le système (1) est également intégrable.

Supposons le nombre des variables t égal à trois; le système (3) dépendra de deux variables t et, pour ce système, les conditions d'intégrabilité seront satisfaites si les formules (2) le sont. En effet, les conditions d'intégrabilité du système (3) s'obtiennent en faisant $t_1 = t_1^0$ dans (2). Donc le système (3) est intégrable, et, par suite, (1) l'est aussi.

Si le nombre des variables t est égal à quatre, on démontrera que le système (3) à trois variables est intégrable, et, par suite, (1) le sera aussi, et ainsi de suite.

Ainsi la condition nécessaire et suffisante pour que le système (1) soit intégrable est que les formules (2) aient lieu identiquement. La marche à suivre pour effectuer l'intégration est celle que nous venons d'indiquer.

Toutefois M. Mayer a montré que, par un changement de variables convenables, on peut toujours faire en sorte que les X_{ij}^0 soient nuls et, par suite, l'intégration du système (1) se ramène à l'intégration d'un système ordinaire, à savoir le système (a).

Nous indiquerons plus loin le perfectionnement apporté par M. Mayer à la méthode précédente.

II.

Avant d'aller plus loin, nous ferons encore quelques observations au sujet des équations aux différentielles totales.

Quand on donne un système d'équations différentielles ordinaires à intégrer, il peut se faire que parmi ces équations il y en ait qui forment un système d'équations aux différentielles totales intégrables. Cette circonstance sera généralement avantageuse, car le système d'équations aux différentielles totales en question pourra s'intégrer séparément et à l'aide d'un système d'équations différentielles ordinaires beaucoup plus simple que le système proposé. Si donc, en faisant subir aux équations proposées certaines transformations algébriques, on peut en déduire des équations aux différentielles totales, on se placera dans des conditions propres à simplifier l'intégration.

Peut-être sera-t-il bon, à cette occasion, de faire observer que, si l'on a un système d'équations du premier degré par rapport aux différentielles des fonctions et des variables, que ce système soit aux différentielles totales ou ordinaires,

$$(m) \qquad \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0, \quad \ldots, \quad \omega_m = 0,$$

il existe toujours un système de multiplicateurs λ_{ij}, tels que

$$\lambda_{i1}\omega_1 + \lambda_{i2}\omega_2 + \ldots + \lambda_{im}\omega_m$$

soit une différentielle exacte. Pour démontrer cette assertion, désignons par

$$(m') \qquad \Omega_1 = \alpha_1, \quad \Omega_2 = \alpha_2, \quad \ldots, \quad \Omega_m = \alpha_m$$

les intégrales des équations (m) résolues par rapport aux constantes d'intégration $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$; les équations

$$d\Omega_1 = 0, \quad d\Omega_2 = 0, \quad \ldots, \quad d\Omega_m = 0$$

qui résultent de la différentiation des équations (m') doivent être identiques à (m), sans quoi l'élimination des différentielles des variables principales entre ces équations et (m) fourniraient des relations entre ces variables; $d\Omega_1, d\Omega_2, \ldots$ doivent donc être des combinaisons linéaires de $\omega_1, \omega_2, \ldots$, ce qui démontre l'existence des multiplicateurs λ_{ij}.

La recherche directe des facteurs λ sera, en général, impraticable, mais on conçoit qu'ils puissent se deviner dans des cas particuliers. Quand les équations (m) seront intégrées, il sera facile de trouver les multiplicateurs, et alors même leur considération peut n'être pas dénuée d'intérêt. En effet, soit :

$$\begin{aligned} \lambda_{11}\omega_1 + \lambda_{12}\omega_2 + \ldots + \lambda_{1m}\omega_m &= d\Omega_1, \\ \lambda_{21}\omega_1 + \lambda_{22}\omega_2 + \ldots + \lambda_{2m}\omega_m &= d\Omega_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

On aura, en appelant Λ le déterminant $\Sigma \pm \lambda_{11}\lambda_{22}, \ldots, \lambda_{mm}$,

$$\omega_1 = \left(\frac{d\Lambda}{d\lambda_{11}} d\Omega_{11} + \frac{d\Lambda}{d\lambda_{21}} d\Omega_2 + \ldots + \frac{d\Lambda}{d\lambda_{m1}} d\Omega_m\right) : \Lambda,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

de sorte que les équations (m) pourront être satisfaites, non-seulement pour $d\Omega_1 = 0, d\Omega_2 = 0, \ldots,$ ou $\Omega_1 = \alpha_1, \Omega_2 = \alpha_2, \ldots,$ mais encore pour $\Lambda = \infty$; mais la solution qui pourra résulter de cette équation $\Lambda = \infty$ ne sera jamais prise en considération dans ce qui va suivre.

En général, pour intégrer le système (1), la marche la plus simple consistera à poser

$$(n) \qquad t_1 = \chi_1(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, t), \quad t_2 = \chi_2 \ldots, \quad t_n = \chi_n \ldots,$$

$\chi_1, \chi_2, \ldots$ désignant des fonctions de t et de $n-1$ paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$, que l'on assujettira à s'annuler à la fois pour $t = t^0$ quels que soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$, ou au moins à se réduire pour $t = t^0$ à des quantités indépendantes de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$. Les équations (1) se réduiront alors à des équations différentielles ordinaires dans lesquelles la variable indépendante sera t; on profitera en général de l'indétermination des fonctions χ pour faciliter l'intégration des équations transformées. Lorsque ces équations auront été intégrées, il suffira d'éliminer entre les intégrales et les équations (n) les paramètres α pour obtenir les intégrales des équations aux différentielles totales (1).

On peut se rendre compte de ce fait de plusieurs manières. On peut, par exemple, supposer qu'aux variables $t_1, t_2, \ldots, t_n$ on substitue les

variables $t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$. Les équations (1) deviennent alors

$$dx_i = \left(X_{i1}\frac{dt_1}{dt} + X_{i2}\frac{dt_2}{dt} + \ldots + X_{in}\frac{dt_n}{dt}\right)dt$$
$$+ \left(X_{i1}\frac{dt_1}{d\alpha_1} + X_{i2}\frac{dt_2}{d\alpha} + \ldots + X_{in}\frac{dt_n}{d\alpha}\right)d\alpha$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

ou, pour abréger,

$$dx_i = \Theta_{i1}\,dt + A_{i1}\,d\alpha_1 + \ldots + A_{in-1}\,d\alpha_{n-1}.$$

Pour intégrer ces équations, on commencera par intégrer le système ordinaire, comme le prescrit la règle énoncée,

$$dx_i = \Theta_i dt;$$

puis, faisant $t = t^0$, on déterminera les x_i^0 qui sont nos constantes d'intégration ou les valeurs des x_i pour $t = t^0$ au moyen des équations

$$dx_i^0 = A_{i1}^0\,d\alpha_1 + A_{i2}^0\,d\alpha_2 + \ldots + A_{in-1}^0\,d\alpha_{n-1};$$

mais $A_{i1}^0, A_{i2}^0, \ldots$ sont nuls ; en effet, on a

$$A_{i1}^0 = X_{i1}^0 = \frac{dt_1^0}{d\alpha_1} + X_{i2}^0\frac{dt_2^0}{d\alpha} + \cdots;$$

or $t_1^0, t_2^0, \ldots$ ont été choisis indépendants des α : donc $\frac{dt_1^0}{d\alpha_1}, \cdots$ sont nuls, donc $A_{i1}^0, A_{i2}^0, \ldots$ sont nuls ; les dx_i^0 sont nuls et, par suite, les x_i^0 sont des constantes absolues. Les intégrales des équations (1) sont donc les intégrales mêmes des équations $dx_i = \Theta_i dt$, et il ne reste plus qu'à y remplacer les nouvelles variables $t_1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ par les anciennes $t_1, t_2, \ldots$.

Supposons qu'il s'agisse d'intégrer l'équation

$$yz\,dx - xy\,dz - xz\,dy = 0;$$

on pourra poser

$$y = t, \quad z = \alpha t;$$

mais, en procédant ainsi, on est conduit à intégrer l'équation

$$x\,dt - 2t\,dx = 0.$$

qui donne

$$x = kt^2$$

pour $t = 0$; x ne peut pas prendre la valeur arbitraire x_0 : la méthode tombe alors en défaut, et il faut prendre

$$y = y_0 + t, \quad z = z_0 + \alpha t.$$

On trouve alors l'équation en t

$$(y_0 + t)(z_0 + \alpha t)dx - (2\alpha t + z_0 + \alpha y_0)x\,dt = 0,$$

d'où l'on tire, en appelant k une constante,

$$x = k(y_0 + t)(z_0 + \alpha t);$$

pour $t = 0$, x prend une valeur arbitraire x_0 et l'on a

$$\frac{x}{x_0} = \frac{(y_0 + t)(z_0 + \alpha t)}{y_0 z_0}.$$

L'élimination de t et α donne l'intégrale cherchée

$$\frac{x}{x_0} = \frac{yz}{y_0 z_0}.$$

III.

Dans la plupart des questions où l'on rencontre des équations simultanées aux dérivées partielles, la fonction inconnue n'entre pas explicitement dans ces équations : c'est ce qui arrive toujours dans les équations que fournissent les problèmes de Mécanique, pour lesquels le théorème des forces vives a lieu.

Mais, lors même que la fonction inconnue apparaît dans les équations données, il est facile de la faire disparaître et de remplacer le système de ces équations par un autre qui ne contienne plus la fonction inconnue. Si l'on désigne, en effet, par

$$\varphi = \text{const.}$$

une intégrale non singulière des équations proposées, on peut prendre la fonction φ comme inconnue, et l'on sait alors que chaque équation du système donné ne contiendra que les dérivées partielles de la fonction φ ; l'ancienne fonction inconnue figurera comme simple variable indépendante dans les équations transformées. Cette manière de faire disparaître la fonction inconnue présente quelques inconvénients, très-légers, il est vrai : ainsi elle fait disparaître les solutions qui ne renferment point de constantes arbitraires, et les équations homogènes auxquelles elle conduit ne se prêtent pas à une méthode d'intégration que nous indiquerons plus loin, et qui peut parfois être la plus simple.

Jacobi a indiqué une autre méthode qu'il n'a pas développée et qui, appliquée à la lettre, conduirait à des résultats absurdes. Voici comment on peut la présenter. Soit

$$(x) \quad f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0, \quad f_2 = 0, \quad \ldots, \quad f_m = 0$$

le système à intégrer, x_1, x_2, ... désignant les variables, u la fonction inconnue, p_1, p_2, ... les dérivées relatives à x_1, x_2, ... respectivement. Posons $v = ut$, d'où

$$\frac{dv}{dt} = u, \quad \frac{1}{t}\frac{dv}{dx_1} = p_1, \quad \frac{1}{t}\frac{dv}{dx_2} = p_2, \quad \ldots;$$

les formules (x) deviendront

$$(y)\ f_1\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, \frac{dv}{dt}, \frac{1}{t}\frac{dv}{dx_1}, \ldots, \frac{1}{t}\frac{dv}{dx_n}\right) = 0, \ f_2 = 0, \ \ldots, \ f_m = 0.$$

et il est clair que, u désignant une solution de (x), ut sera une solution de (y) ; mais, $v = ut$ étant une solution de (y), $u = \frac{v}{t}$ ne sera pas nécessairement une solution de (x), car $\frac{v}{t}$ pourra contenir t et l'on n'aura pas $\frac{dv}{dt} = u$, mais bien $\frac{dv}{dt} = u + t\frac{du}{dt}$.

Quoi qu'il en soit, désignons par v une solution du système (y) ; en remplaçant v par sa valeur dans le système (y), celui-ci se réduira à des identités, c'est-à-dire sera satisfait quels que soient x_1, x_2, ..., t et, par suite, il le sera encore si l'on y suppose t fonction des x et en parti-

culier si t est défini en fonction des x par le moyen de l'équation

$$(z) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{v}{t}\right) = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{du}{dt} = 0.$$

Mais, quand on fera cette supposition, on obtiendra les mêmes identités que si l'on avait remplacé $\frac{dv}{dt}$ par u, ce qui revient à dire que les équations (x) seront satisfaites en prenant $u = \frac{v}{t}$ et en supposant t défini par la relation (z).

En d'autres termes, connaissant une intégrale $F = 0$ de (y), pour en déduire une de (x), il suffira d'éliminer t entre cette intégrale et (z) ou l'équation suivante, obtenue en différentiant cette intégrale $F = 0$:

$$\frac{du}{dt}\frac{dF}{du} + \frac{dF}{dt} = 0.$$

IV.

Nous allons maintenant exposer notre méthode d'intégration des équations simultanées aux dérivées partielles, non linéaires.

Désignons par $f_1, f_2, \ldots, f_n$ des fonctions données des variables x_1, $x_2, \ldots, x_m, t_1, t_2, \ldots, t_n$, et des dérivées partielles $\frac{du}{dx_1}, \frac{du}{dx_2}, \ldots, \frac{du}{dx_m}$ d'une fonction inconnue u, prises par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Tout système d'équations aux dérivées partielles simultanées à une seule fonction inconnue u, ne contenant pas explicitement la fonction u elle-même, pourra être présenté sous la forme

$$(4) \qquad \frac{du}{dt_1} = f_1, \quad \frac{du}{dt_2} = f_2, \quad \ldots, \quad \frac{du}{dt_n} = f_n.$$

Nous désignerons par $p_1, p_2, \ldots, p_m$ les dérivées $\frac{du}{dx_1}, \frac{du}{dx_2}, \ldots, \frac{du}{dx_m}$. Si les équations (4) admettent une solution commune, cette solution devra satisfaire à l'équation

$$(5) \quad Du = p_1\,Dx_1 + p_2\,Dx_2 + \ldots + p_m\,Dx_m + f_1\,Dt_1 + \ldots + f_n\,Dt_n,$$

le symbole $\mathrm{D}u$ désignant la différentielle totale de u, prise en donnant à $x_1, x_2, \ldots, x_m, t_1, t_2, \ldots, t_n$ les accroissements arbitraires $\mathrm{D}x_1, \mathrm{D}x_2, \ldots, \mathrm{D}x_m, \mathrm{D}t_1, \ldots, \mathrm{D}t_n$. Réciproquement d'ailleurs, si l'on peut trouver des fonctions $p_1, p_2, \ldots, p_m$ des x et des t telles que le second membre de l'équation (5) soit une différentielle exacte, l'intégrale u de cette différentielle sera une solution commune aux équations (4).

Désignons par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ des fonctions actuellement indéterminées de $x_1, x_2, \ldots, x_m, t_1, t_2, \ldots, t_n$ et effectuons le changement de variables qui consiste à substituer les α aux x. Si nous convenons de représenter par $\delta \mathrm{F}$ la différentielle totale d'une fonction F prise en faisant varier les α, mais en laissant les t constants, et par $d\mathrm{F}$ la différentielle totale de la même fonction prise en faisant varier les t, mais en laissant les α constants, l'équation (5) pourra évidemment être remplacée par les deux suivantes :

$$du = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \ldots + p_m dx_m + f_1 dt_1 + \ldots + f_n dt_n,$$
$$\delta u = p_1 \delta x_1 + p_2 \delta x_2 + \ldots + p_m \delta x_m,$$

que nous écrirons

(6) $$du = \Sigma p\, dx + \Sigma f dt,$$

(7) $$\delta u = \Sigma p\, \delta x.$$

Si l'on suppose que les équations (4) aient une solution commune, les équations (6) et (7) seront satisfaites, et en différentiant la première avec la caractéristique δ, la seconde avec la caractéristique d, on aura

$$\delta du = \Sigma p \delta dx + \Sigma \delta p dx + \Sigma \delta f dt,$$
$$d\delta u = \Sigma p \delta dx + \Sigma dp\, \delta x,$$

et, en observant que $d\delta u$ est égal à δdu, on aura par soustraction

(8) $$\Sigma \delta p\, dx - \Sigma dp\, \delta x + \Sigma \delta f\, dt = 0;$$

d'ailleurs la fonction u sera donnée par la formule

(9) $$u = u^0 + \int (\Sigma p dx + \Sigma f dt),$$

l'indice o placé en haut d'une lettre indiquant, une fois pour toutes,

que l'on doit remplacer dans la quantité représentée par cette lettre t_1 par t_1^0, t_2 par $t_2^0, \ldots, t_n$ par t_n^0; u^0 est alors la valeur que prend u pour $t_1 = t_1^0, \ldots$. Cette valeur pourra dépendre des α, mais elle sera indépendante des t. Enfin l'intégrale doit être prise entre des limites telles, qu'elle s'annule pour $t_1 = t_1^0, \ldots, t_n = t_n^0$.

Différentions la formule (9) par rapport aux α, nous aurons

$$\delta u = \delta u^0 + \int (\Sigma\, \delta p\, dx + \Sigma\, p\, \delta\, dx + \Sigma\, \delta f\, dt),$$

ou, en intégrant par parties les termes $p\,\delta\, dx$,

$$\delta u = \delta u^0 + \Sigma\, p\, \delta x - \Sigma\, p^0\, \delta x^0 + \int (\Sigma\, \delta p\, dx - \Sigma\, dp\, \delta x - \Sigma\, \delta f\, dt),$$

c'est-à-dire, en vertu de (8) et (7),

$$\delta u^0 - \Sigma\, p^0\, \delta x^0 = 0. \tag{10}$$

On satisfera à l'équation (8) en posant

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} -dx_1 &= \frac{df_1}{dp_1} dt_1 + \frac{df_2}{dp_1} dt_2 + \ldots + \frac{df_n}{dp_1} dt_n, \\ -dx_2 &= \frac{df_1}{dp_2} dt_1 + \frac{df_2}{dp_2} dt_2 + \ldots + \frac{df_n}{dp_2} dt_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ -dx_m &= \frac{df_1}{dp_m} dt_1 + \frac{df_2}{dp_m} dt_2 + \ldots + \frac{df_n}{dp_m} dt_n, \end{aligned}\right.$$

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} dp_1 &= \frac{df_1}{dx_1} dt_1 + \frac{df_2}{dx_1} dt_2 + \ldots + \frac{df_n}{dx_1} dt_n, \\ dp_2 &= \frac{df_1}{dx_2} dt_1 + \frac{df_2}{dx_2} dt_2 + \ldots + \frac{df_n}{dx_2} dt_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ dp_m &= \frac{df_1}{dx_m} dt_1 + \frac{df_2}{dx_m} dt_2 + \ldots + \frac{df_n}{dx_m} dt_n, \end{aligned}\right.$$

et à la formule (10) en posant

$$u^0 = \varpi(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0), \tag{13}$$

$$(13\ bis)\qquad p_1^0 = \frac{d\varpi}{dx_1^0}, \quad p_2^0 = \frac{d\varpi}{dx_2^0}, \quad \ldots, \quad p_m^0 = \frac{d\varpi}{dx_m^0},$$

ϖ désignant une fonction arbitraire de x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0 [*].

Supposons les équations (11) et (12) complétement intégrables, et intégrons-les; les $2m$ constantes d'intégration devront être considérées comme des fonctions des α et nous prendrons pour ces $2m$ constantes les valeurs $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0, p_1^0, p_2^0, \ldots, p_m^0$ de $x_1, x_2, \ldots, x_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$ pour $t_1 = t_1^0, \ldots, t_n = t_n^0$. Supposons en outre que les valeurs des x et des p tirées des intégrales de (11) et (12) substituées dans l'équation (6) la rendent intégrable; si les constantes $u^0, x_1^0, x_2^0, \ldots, p_1^0, p_2^0, \ldots, p_m^0$ sont choisies de manière à satisfaire aux relations (13) et (13 *bis*), la valeur de u calculée au moyen de l'équation (9), en remplaçant les x et les p par leurs valeurs en fonction des t, satisfera évidemment aux équations (6) et (7); l'élimination des α fournira alors u et les p en fonction des x et des t.

Si donc, entre les intégrales du système (11) et (12), l'équation (9) et les équations (13) et (13 *bis*), au nombre de $3m+2$, on élimine les $2m+1$ constantes $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0, p_1^0, p_2^0, \ldots, p_m^0, u^0$, il restera $m+1$ équations ne contenant plus les α et qui feront connaître $p_1, p_2, \ldots, p_m$ et u en fonction des x et des t.

On peut aussi, entre ces mêmes équations, éliminer non-seulement les x^0, les p^0 et u, mais aussi $p_1, p_2, \ldots, p_m$, et la résultante fera connaître la fonction inconnue u. En résumé :

Si les équations dont le type est

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} du &= p_1 dx_1 + \ldots + p_m dx_m + f_1 dt_1 + \ldots + f_n dt_n,\\ -dx_i &= \frac{df_1}{dp_i} dt_1 + \frac{df_2}{dp_i} dt_2 + \ldots + \frac{df_n}{dp_i} dt_n,\\ dp_i &= \frac{df_1}{dx_i} dt_1 + \frac{df_2}{dx_i} dt_2 + \ldots + \frac{df_n}{dp_i} dt_n \end{aligned}\right.$$

forment un système d'équations aux différentielles totales que l'on puisse intégrer de telle sorte que pour $t_1 = t_1^0, \ldots, t_n = t_n^0$, les quantités $x_1, x_2, \ldots, x_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$, u se réduisent à $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0$, $p_1^0, p_2^0, \ldots, p_m^0$, u^0 respectivement, les équations (4) seront satisfaites

[*] Il résultera de notre analyse que le système (11) et (12) est complétement intégrable en même temps que le système (4), et qu'il l'est encore quand on y adjoint l'équation (6).

par la valeur de u que l'on obtiendra en éliminant $x_1^0, \ldots, x_m^0, p_1^0, \ldots, p_m^0, u^0, p_1, p_2, \ldots, p_m$ entre les intégrales du système (14) *et les équations* (13) *et* (13 *bis*), *dans lesquelles ϖ désigne une fonction arbitraire.*

Pour éliminer les quantités $x_1^0, \ldots, x_m^0, p_1^0, \ldots, p_m^0, u^0, p_1, \ldots, p_m$ entre les intégrales des équations (14) et les équations (13 et 13 *bis*), on peut résoudre les équations intégrales de (14) et les équations (13 *bis*) par rapport aux x^0, aux p^0, aux p et à u^0 et porter les valeurs de u^0, $x_1^0, \ldots, x_m^0$ dans (13). Supposons que l'on ait trouvé

$$\begin{aligned} x_i^0 &= \lambda_i(t_1, t_2, \ldots, t_n, x_1, x_2, \ldots, x_m, u) = \lambda_i, \\ u^0 &= \mu(t_1, t_2, \ldots, t_n, x_1, x_2, \ldots, x_m, u) = \mu; \end{aligned}$$

en faisant dans ces formules $t_1 = t_1^0, t_2 = t_2^0, \ldots, t_n = t_n^0$, on aura

$$\begin{aligned} x_1^0 &= \lambda_i(t_1^0, \ldots, t_n^0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0, u^0), \\ u^0 &= \mu(t_1^0, \ldots, t_n^0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0, u^0); \end{aligned}$$

mais, les x^0 et u^0 étant tout à fait arbitraires, ces formules sont des identités et l'on peut y remplacer les x^0 et u^0 par les x et par u. On a donc identiquement

$$(15) \qquad \left\{ \begin{aligned} x_1 &= \lambda_i(t_1^0, t_2^0, \ldots, t_n^0, x_1, x_2, \ldots, x_m, u) = \lambda_i', \\ u &= \mu(t_1^0, t_2^0, \ldots, t_n^0, x_1, x_2, \ldots, x_m, u) = \mu'. \end{aligned} \right.$$

La résultante qui fait connaître u peut s'écrire

$$\mu = \varpi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$$

et, si l'on fait dans cette équation $t_1 = t_1^0, t_2 = t_2^0, \ldots, t_n = t_n^0$, elle devient, en vertu des formules (15),

$$\mu' = \varpi(\lambda_1', \lambda_2', \ldots, \lambda_m')$$

ou

$$u = \varpi(x_1, x_2, \ldots, x_m).$$

La solution u que l'on trouve par le procédé que nous venons d'indiquer se réduit donc à la fonction arbitraire $\varpi(x_1, \ldots, x_m)$, quand on y fait $t_1 = t_1^0, t_2 = t_2^0, \ldots, t_m = t_m^0$.

On peut trouver, d'une autre manière, une solution commune aux

équations (4); il suffit pour cela de poser $\partial x_1^0 = 0, \ldots, \partial x_m^0 = 0$ et $\partial u^0 = 0$; l'équation (10) sera alors satisfaite, et si entre les intégrales des équations (14) on élimine les p^0, qui seuls contiennent $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, on aura les p et u en fonction des x et des t; en éliminant aussi les p, on aura u. Mais il faudra que ces éliminations soient possibles, ce qui n'aura pas toujours lieu.

La nouvelle solution est une solution complète, puisqu'elle renferme les arbitraires $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0, u^0$.

V.

Réciproquement : *Si l'on connaît une solution des équations (4) renfermant, outre la constante additive que l'on peut toujours introduire, m autres constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$: 1° le système des équations (11) et (12) sera intégrable et les intégrales de ce système seront données par les formules*

$$(16)\qquad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x_1} = p_1, & \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x_2} = p_2, & \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x_m} = p_m, \\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\alpha_1} = -\beta_1, & \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\alpha_2} = -\beta_2, & \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\alpha_m} = -\beta_m, \end{cases}$$

$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ désignant de nouvelles constantes arbitraires; 2° les valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$ tirées de ces équations (15) et portées dans l'équation

$$(16\ bis)\qquad du = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \ldots + p_m dx_m + f_1 dt_1 + \ldots + f_n dt_n,$$

rendront cette équation intégrable, et la valeur de u que l'on en déduira sera précisément la solution complète en question

En effet, désignons par ∂F la différentielle d'une fonction F des variables $t_1, t_2, \ldots, t_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$, prise en faisant varier $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ seuls, et en laissant $t_1, t_2, \ldots, t_n$ constants, et par dF la différentielle de la même fonction prise en faisant varier $t_1, t_2, \ldots, t_n$, mais en laissant $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_m$ constants, on aura, en différentiant la fonction u avec la caractéristique ∂ et en ayant égard aux formules (16),

$$\partial u = \Sigma p\, dx - \Sigma \beta\, \partial \alpha$$

et, en différentiant cette équation avec la caractéristique d,

$$(17) \qquad d\delta u = \Sigma dp\,\delta x + \Sigma p\,\delta dx.$$

D'un autre côté, en différentiant la fonction u avec la caractéristique d et en faisant usage des équations (4) pour calculer $\frac{du}{dt_1}, \frac{du}{dt_2}, \cdots, \frac{du}{dt_n}$ et des formules (16) pour calculer $\frac{du}{du_1}, \cdots, \frac{dx}{dx_m}$, on a

$$du = \Sigma p\,dx + \Sigma f\,dt$$

et, en différentiant cette formule avec la caractéristique δ,

$$\delta\,du = \Sigma\,\delta p\,dx + \Sigma p\,\delta\,dx + \Sigma\,\delta f\,dt;$$

en retranchant de cette formule la formule (17), on a

$$0 = \Sigma\,\delta p\,dx - \Sigma\,\delta x\,dp + \Sigma\,\delta f\,dt.$$

Mais, les $\delta\alpha$ et les $\delta\beta$ étant arbitraires, les δp et les δx le sont aussi; en égalant alors leurs coefficients à zéro, on retrouve précisément les équations (11) et (12) : celles-ci sont donc des conséquences de (16) et, par suite, forment un système intégrable dont les intégrales sont bien représentées par ces équations (16). Il reste à faire voir que l'équation

$$du = \Sigma p\,dx + \Sigma f\,dt$$

est également intégrable; or cette équation, en vertu des équations (4) et (16), se réduit à

$$du = \sum \frac{du}{dx}\,dx + \sum \frac{du}{dt}\,dt,$$

et le second membre est manifestement une différentielle exacte.

Ainsi, en faisant usage d'une locution abrégée et dont le sens a été expliqué au début de ce Mémoire, on peut dire que :

Les conditions d'intégrabilité complète du système (4) *et du système* (16), (16 *bis*) *sont les mêmes.*

VI.

Pour trouver les conditions d'intégrabilité complète du système (4), il suffit donc de chercher celles du système (11), (12) ou plutôt (14) ; or ces dernières conditions sont fournies très-simplement par la théorie des équations aux différences totales et peuvent s'écrire immédiatement.

Sans doute, on peut établir, en suivant la marche indiquée par Jacobi et par Bour, les conditions d'intégrabilité complète des équations (4), mais peut-être d'une façon moins élémentaire. Il n'est d'ailleurs pas sans intérêt de poursuivre ces analogies entre les intégrales des équations différentielles ordinaires et les équations aux dérivées partielles du premier ordre, qui ont été tout d'abord signalées par Jacobi et qui sont telles qu'à un théorème sur les équations aux dérivées partielles correspond un théorème relatif aux équations ordinaires ou aux différentielles totales.

Si nous appliquons le théorème exprimé par les équations (2) aux équations (11) et (12), nous trouvons que les conditions d'intégrabilité complète de ces équations sont données par les formules

$$\frac{d}{dt_i}\frac{df_j}{dp_k}+\sum_\mu\left(\frac{d^2f_j}{dp_k\,dp_\mu}\frac{df_i}{dx_\mu}-\frac{d^2f_j}{dp_k\,dx_\mu}\frac{df_i}{dp_\mu}\right)$$
$$=\frac{d}{dt_j}\frac{df_i}{dp_k}+\sum_\mu\left(\frac{d^2f_i}{dp_k\,dp_\mu}\frac{df_j}{dx_\mu}-\frac{d^2f_i}{dp_k\,dx_\mu}\frac{df_j}{dp_\mu}\right)$$

et

$$\frac{d}{dt_i}\frac{df_j}{dx_k}+\sum_\mu\left(\frac{d^2f_j}{dx_k\,dp_\mu}\frac{df_i}{dx_\mu}-\frac{d^2f_j}{dp_k\,dx_\mu}\frac{df_i}{dp_\mu}\right)$$
$$=\frac{d}{dt_j}\frac{df_i}{dx_k}+\sum_\mu\left(\frac{d^2f_i}{dx_k\,dx_\mu}\frac{df_i}{dx_\mu}-\frac{d^2f_j}{dx_k\,dx_\mu}\frac{df_j}{dp_\mu}\right).$$

Ces deux équations peuvent s'écrire

$$(18)\qquad\left\{\begin{aligned}&\frac{d}{dp_k}\left(\frac{df_j}{dt_i}-\frac{df_i}{dt_j}\right)+\left(\frac{df_i}{dp_k},f_j\right)+\left(f_i,\frac{df_j}{dp_k}\right)=0,\\&\frac{d}{dx_k}\left(\frac{df_j}{dt_i}-\frac{df_i}{dt_j}\right)+\left(\frac{df_i}{dx_k},f_j\right)+\left(f_i,\frac{df_j}{dx_k}\right)=0.\end{aligned}\right.$$

En faisant usage de la notation de Poisson (α, β) pour représenter la somme

$$\sum \left(\frac{d\alpha}{dp_\mu} \frac{d\beta}{dx_\mu} - \frac{d\alpha}{dx_\mu} \frac{d\beta}{dp_\mu} \right),$$

les formules (18) reviennent aux suivantes :

$$(19) \quad \begin{cases} \dfrac{d}{dp_k} \left[\dfrac{df_j}{dt_i} - \dfrac{df_i}{dt_j} + (f_i, f_j) \right] = 0, \\ \dfrac{d}{dx_k} \left[\dfrac{df_j}{dt_i} - \dfrac{df_i}{dt_j} + (f_i, f_j) \right] = 0 \end{cases}$$

Ainsi, pour que les équations (11) et (12) soient complétement intégrables, il faut et il suffit que les quantités de la forme

$$\frac{df_j}{dt} - \frac{df_i}{dt_j} + (f_i, f_j)$$

ne contiennent ni les p ni les x. Lorsque les fonctions f ne contiendront pas les t, ce qui arrivera fréquemment dans les applications, les conditions d'intégrabilité complète des formules (11) et (12) se réduiront à

$$(f_i, f_j) = \text{const.}$$

Pour trouver les conditions d'intégrabilité complète du système (14), il ne reste plus qu'à exprimer que la première équation (14), à savoir

$$du = \Sigma p dx + \Sigma f dt,$$

est intégrable en y supposant les dx exprimés à l'aide des dt. Si l'on remplace les dx par leurs valeurs tirées de (11), on trouve

$$du = \left(f_1 - \sum_\mu p_\mu \frac{df_1}{dp_\mu} \right) dt_1 + \left(f_2 - \sum_\mu p_\mu \frac{df_2}{dp_\mu} \right) dt_2 + \ldots.$$

Pour que cette équation soit intégrable, il faut et il suffit que l'on ait

$$\frac{d}{dt_j} \left(f_i - \sum_\mu p_\mu \frac{df_i}{dp_\mu} \right) - \left(f_i - \sum_\mu p_\mu \frac{df_i}{dp_\mu}, f_j \right)$$
$$= \frac{d}{dt_i} \left(f_j - \sum_\mu p_\mu \frac{df_j}{dp_\mu} \right) - \left(f_j - \sum_\mu p_\mu \frac{df_j}{dp_\mu}, f_i \right)$$

ou

$$\frac{df_i}{dt_j} - \frac{df_j}{dt_i} - \sum_\mu p_\mu \frac{d}{dp_\mu}\left(\frac{df_i}{dt_j} - \frac{df_j}{dt_i}\right) - (f_i, f_j)$$
$$+ (f_i, f_j) + \sum_\mu p_\mu \left[\left(\frac{df_i}{dp_\mu}, f_j\right) + \left(f_i, \frac{df_j}{dp_\mu}\right)\right]$$
$$+ \sum_\mu \frac{df_i}{dp_\mu}(p_\mu, f_j) - \sum_\mu \frac{df_j}{dp_\mu}(p_\mu, f_i) = 0,$$

ou, en vertu des relations (19),

$$(20) \qquad \frac{df_i}{dt_j} - \frac{df_j}{dt_i} - (f_i, f_j) = 0.$$

En donnant dans cette formule à i et à j toutes les valeurs entières depuis 1 jusqu'à n, on aura les conditions d'intégrabilité complète du système (14), c'est-à-dire du système (4).

VII.

Avant d'aller plus loin, faisons une application des théories précédentes au système des équations linéaires :

$$(21) \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt_1} = X_{11}p_1 + X_{21}p_2 + \ldots + X_{m1}p_m, \\ \dfrac{du}{dt_2} = X_{12}p_1 + X_{22}p_2 + \ldots + X_{m2}p_m, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{du}{dt_n} = X_{1n}p_1 + X_{2n}p_2 + \ldots + X_{mn}p_m, \end{cases}$$

X_{ij} désignant en général une fonction des x et des t ne contenant aucune des quantités p. Pour intégrer les équations (21), il faudra former les équations (11), (12), lesquelles deviennent, dans le cas actuel,

$$(22) \qquad \begin{cases} -dx_1 = X_{11}\,dt_1 + X_{12}dt_2 + \ldots + X_{1n}\,dt_n, \\ -dx_2 = X_{21}\,dt_1 + X_{22}dt_2 + \ldots + X_{2n}\,dt_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ -dx_m = X_{m1}dt_1 + X_{m2}dt_2 + \ldots + X_{mn}dt_n, \end{cases}$$

$$(23) \qquad \begin{cases} dp_1 = \left(p_1 \dfrac{dX_{11}}{dx_1} + p_2 \dfrac{dX_{21}}{dx_1} + \ldots\right) dt_1 + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

On intégrera ces équations en prenant pour constantes d'intégration les x^0 et les p^0, on portera les valeurs des p et des x résultant de cette intégration dans l'équation

$$(24) \qquad u = u_0 + \int (\Sigma p\,dx + \Sigma f\,dt),$$

puis, l'intégration effectuée, on éliminera les p^0, les x^0, u^0 et les p entre les intégrales de (22) et (23), l'équation (24) et les équations

$$(25) \qquad u^0 = \varpi(x_1^0, x_2^0, \ldots), \quad p_1^0 = \frac{d\varpi}{dx_1^0}, \quad p_2^0 = \frac{d\varpi}{dx_2^0}, \quad \ldots.$$

Or 1°, les p n'entrant pas dans les équations (22), celles-ci forment un système intégrable; 2° si dans (24) on remplace les lettres f par leurs valeurs, le coefficient de p_i sera

$$X_{i1}\,dt_1 + X_{i2}\,dt_2 + \ldots \text{ ou } -dx_i;$$

de sorte que l'équation (24) se réduira à $u = u^0$. Or, les p^0 n'entrant ni dans les intégrales de (22) ni dans cette équation $u = u^0$, l'élimination des p et des p^0 sera toute faite si on laisse de côté les intégrales de (23) et les équations

$$p_1^0 = \frac{d\varpi}{dx_1^0}, \quad p_2^0 = \frac{d\varpi}{dx_2^0}, \quad \ldots.$$

L'intégrale complète du système linéaire (21) s'obtiendra donc tout simplement en posant

$$u = \varpi(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$$

et en remplaçant dans cette formule x_1^0, x_2^0, ... par leurs valeurs tirées des intégrales du système (22). Mais ϖ est une fonction arbitraire des x^0 : c'est donc aussi une fonction arbitraire des constantes d'intégration du système (22), quelles que soient ces constantes. On peut donc dire sous une forme abrégée que :

La solution complète commune aux équations (21), *quand elle existe, est une fonction arbitraire des constantes d'intégration du système* (22).

La forme de ce résultat montre d'ailleurs que toute intégrale ou, si l'on veut, que toute fonction qui, égalée à une constante, constitue une

intégrale du système (22) sera une intégrale du système (21). Réciproquement d'ailleurs, toute solution non singulière des équations (21) étant de la forme $\varpi(x_1^0, x_2^0, \ldots)$ sera une intégrale des équations (22).

D'après ce que nous venons de voir, les équations (11) et (12) pourront être remplacées dans le cas général par le système des équations linéaires aux dérivées partielles

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dv}{dt_1} = &\ \frac{df_1}{dp_1}\frac{dv}{dx_1} + \frac{df_1}{dp_2}\frac{dv}{dx_2} + \ldots + \frac{df_1}{dp_m}\frac{dv}{dx_m} \\ &- \frac{df_1}{dx_1}\frac{dv}{dp_1} - \frac{df_1}{dx_2}\frac{dv}{dx_1} - \ldots - \frac{df_1}{dx_m}\frac{dv}{dp_m}, \\ \frac{dv}{dt_2} = &\ \frac{df_2}{dp_1}\frac{dv}{dx_1} + \ldots - \frac{df_2}{dx_1}\frac{dv}{dp_1} - \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

en ce sens que, dès que l'on connaîtra une intégrale α de ce système (26), on aura une intégrale $\alpha =$ const. du système (11). (12). Or, en faisant usage de la notation de Poisson, déjà employée plus haut, on pourra mettre les équations (26) sous la forme

$$(27)\qquad \frac{dv}{dt_1} = (f_1, v), \quad \frac{dv}{dt_2} = (f_2, v), \quad \ldots, \quad \frac{dv}{dt_n} = (f_n, v).$$

Désignons par v_1 et v_2 deux intégrales de ce système (27), ou, ce qui revient au même, deux intégrales du système (11), (12) (nous supposons que v_1, v_2 ne sont pas des solutions singulières), en vertu du théorème de Donkin, on a

$$[v_1, (f_1, v_2)] + [v_2, (v_1, f_1)] + [f_1, (v_2, v_1)] = 0,$$

ou, en vertu de (27),

$$\left(v_1, \frac{dv_2}{dt_1}\right) + \left(\frac{d_1}{dt_1}, v_2\right) + [f_1, (v_2, v_1)] = 0.$$

Cette équation peut s'écrire

$$\frac{d(v_2, v_1)}{dt_1} = [f_1, (v_2, v_1)];$$

on trouverait de même

$$\frac{d(v_2, v_1)}{dt_2} = [f_2, (v_2, v_1)],$$

$$\frac{d(v_2, v_1)}{dt_3} = [f_3, (v_2, v_1)],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

L'expression (v_1, v_2) est donc une intégrale des équations (27), et par suite $(v_1, v_2) =$ const. est une nouvelle intégrale des équations (11), (12). Toutefois, ce théorème, comme celui de Poisson, tombera en défaut si (v_1, v_2) est une constante numérique ou une fonction des intégrales déjà connues. Ainsi donc :

Si v_1, v_2 sont des fonctions qui, égalées à des constantes, fournissent des intégrales de (11) *et* (12), (v_1, v_2) *égalé à une constante fournira une nouvelle intégrale du système* (11), (12), *à moins que* (v_1, v_2) *soit identiquement constant ou fonction des intégrales déjà trouvées* [*].

VIII.

Revenons maintenant sur notre analyse, afin de bien préciser l'ordre de difficulté des opérations que l'on aura à effectuer pour résoudre le système (4). En définitive, l'intégration du système (4) se ramène à l'intégration du système (11), (12). Pour intégrer ce système, il faudra d'abord intégrer les équations canoniques

$$(27)\quad \left\{ \begin{aligned} -dx_1 &= \frac{df_1}{dp_1}\,dt_1, & -dx_2 &= \frac{df_1}{dp_2}\,dt_1 & \ldots, \\ dp_1 &= \frac{df_1}{dx_1}\,dt_1, & dp_2 &= \frac{df_1}{dx_2}\,dt_1, & \ldots, \end{aligned} \right.$$

au nombre de $2m$. Si pour $t_1 = t_1^0$ les dérivées des fonctions $f^2, f_3, \ldots$ s'annulaient, les intégrales des équations (27), dans lesquelles on aurait

---

[*] Le cas où l'on a $(v_1, v_2) = 0$ identiquement permet de simplifier l'intégration des équations (4) ; en effet, les équations $v_1 =$ const., $v_2 =$ const. sont de nouvelles équations pouvant servir avec (4) à la définition de la fonction u.

pris pour constantes d'intégration les valeurs des x et des p pour

$$t_1 = t_1^0,$$

seraient les intégrales de (11) et (12); le reste du calcul se composerait alors d'une quadrature et d'une élimination. Or, nous allons voir que par un changement de variable, indiqué par M. Mayer, on peut toujours faire en sorte qu'il en soit ainsi.

Posons

$$t_i = \tau_i + (\theta_1 - \theta_1^0)\theta_i;$$

τ_i désignant une constante et $\theta_1, \theta_2, \ldots$ désignant de nouvelles variables, on aura

$$dt_i = (\theta_1 - \theta_1^0)\,d\theta_i + \theta_i\,d\theta_1,$$
$$dt_1 = (2\theta_1 - \theta_1^0)\,d\theta_1;$$

les équations (11) et (12) deviendront alors

$$- dx_1 = d\theta_1\left[\frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}p_2}(2\theta_1 - \theta_0) + \frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}p_1}\theta_2 + \frac{\mathrm{d}f_3}{\mathrm{d}p_1}\theta_3 + \ldots\right]$$
$$+ d\theta_2\left[\frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}p_1}(\theta_1 - \theta_1^0)\right] + d\theta_3\left[\frac{\mathrm{d}f_3}{\mathrm{d}p_1}(\theta_1 - \theta_1^0)\right] + \ldots,$$

. . . .

$$dp_1 = d\theta_1\left[\frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}x_1}(2\theta_1 - \theta_1^0) + \frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}x_1}\theta_2 + \frac{\mathrm{d}f_3}{\mathrm{d}x_1}\theta_3 + \ldots\right]$$
$$+ d\theta_2\frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}p_1}(\theta_1 - \theta_1^0) + d\theta_3\frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}p_1}(\theta_1 - \theta_1^0),$$

. . . .

Les équations différentielles à intégrer sont alors

$$- dx_1 = d\theta_1\left[\frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}p_1}(2\theta_1 - \theta_1^0) + \frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}p_1}\theta_2 + \frac{\mathrm{d}f_3}{\mathrm{d}p_1}\theta_3 + \ldots\right],$$

. . . . ,

$$dp_1 = d\theta_1\left[\frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}x_1}(2\theta_1 - \theta_1^0) + \frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}x_1}\theta_2 + \frac{\mathrm{d}f_3}{\mathrm{d}p_1}\theta_3 + \ldots\right],$$

. . . .

Si l'on pose

$$H = f_1(2\theta_1 - \theta_1^0) + f_2\theta_2 + f_3\theta_3 + \ldots,$$

elles peuvent s'écrire

$$-dx_1 = \frac{dH}{dp_1} d\theta_1, \quad -dx_2 = \frac{dH}{dp_2} d\theta_1, \quad \ldots,$$
$$dp_1 = \frac{dH}{dx_1} d\theta_1, \qquad dp_2 = \frac{dH}{dx_2} d\theta_1, \quad \ldots;$$

et il est remarquable qu'elles ont conservé la forme canonique. Ainsi, en résumé :

L'intégration d'un système de n équations aux dérivées partielles du premier ordre à une seule fonction inconnue de m + n variables, ne contenant pas explicitement cette fonction inconnue, dépend de l'intégration d'un seul système d'équations canoniques contenant 2m équations.

Si le système canonique auquel on est ainsi ramené s'intègre sans difficulté, ou encore, si l'on peut facilement découvrir les intégrales du système (11), (12), la méthode précédente donnera très-simplement la solution des équations (4); sinon il faudra avoir recours à la méthode de Bour et de Jacobi, que l'on pourra d'abord combiner avec celle que nous venons d'exposer.

IX.

Étant donné un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre, on pourra toujours faire disparaître la fonction inconnue elle-même, par l'un des procédés indiqués par Jacobi pour le cas d'une seule équation; nous pouvons donc supposer que la fonction inconnue n'entre pas explicitement dans les équations du système donné; pour trouver les conditions d'intégrabilité complète de ce système et pour l'intégrer, il n'est pas nécessaire de le ramener à la forme (4), ce qui pourrait d'ailleurs être impossible à effectuer. Considérons en effet les équations

$$(28) \qquad F_1 = h_1, \quad F_2 = h_2, \quad \ldots, \quad F_n = h_n,$$

dans lesquelles $h_1, h_2, \ldots, h_n$ désignent des constantes que nous supposerons d'abord déterminées (nulles si l'on veut) et dans lesquelles $F_1, F_2, \ldots, F_n$ désignent des fonctions des $m + n = \mu$ variables x_1,

$x_2, \ldots, x_m, \ldots, x_\mu$ et des dérivées $p_1 = \frac{du}{dx}, p_2 = \frac{du}{dx^2}, \ldots, p_\mu = \frac{du}{dx_\mu}$ de la fonction inconnue u. Posons $x_{m+1} = t_1, \ldots, x_{m+n} = t_n$ et supposons les équations (28) résolues par rapport à $\frac{du}{dt_1}, \ldots, \frac{du}{dt_n}$, elles prendront la forme (4) et les conditions de leur intégrabilité complète seront les formules (20). Or si, changeant de notation, on pose en général

$$(\alpha, \beta) = \sum_{s=1}^{s=m+n} \left(\frac{d\alpha}{dp_s}\frac{d\beta}{dx_s} - \frac{d\alpha}{dx_s}\frac{d\beta}{dp_s}\right),$$

les formules (20) prendront la forme

(29) $$(p_{m+i}, p_{m+j}) = 0.$$

On a, en effet,

$$\frac{df_i}{dt_j} = \frac{dp_{m+i}}{dx_{m+j}} = \frac{dp_{m+j}}{dp_{m+j}}\frac{dp_{m+i}}{dx_{m+j}} - \frac{dp_{m+j}}{dx_{m+i}}\frac{dp_{m+i}}{dp_{m+j}}.$$

Or on a, comme l'on sait et comme il est bien facile de le vérifier,

(30) $$(\alpha, \beta) = \sum_{i,j}\left(\frac{d\alpha}{d\gamma_i}\frac{d\beta}{d\gamma_j} - \frac{d\alpha}{d\gamma_j}\frac{d\beta}{d\gamma_i}\right)(\gamma_i, \gamma_j),$$

α, β désignant des fonctions des quantités γ et $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ désignant des fonctions des variables x et p. Si dans cette formule on suppose que les γ soient les fonctions p_{m+i} et que α et β soient deux des fonctions F, on aura

$$(F_\mu, F_\nu) = \sum\left(\frac{dF_\mu}{dp_{m+i}}\frac{dF_\nu}{dp_{m+j}} - \frac{dF_\mu}{dp_{m+j}}\frac{dF_\nu}{dp_{m+i}}\right)(p_{m+i}, p_{m+j}),$$

d'où l'on conclut, en vertu de (29),

(31) $$(F_\mu, F_\nu) = 0;$$

réciproquement, d'ailleurs, si les (F_μ, F_ν) sont nuls, les formules (29) auront lieu; car on a, toujours en vertu du théorème contenu dans l'équation (30),

$$(p_{m+i}, p_{m+j}) = \sum\left(\frac{dp_{m+i}}{dF_\mu}\frac{dp_{m+j}}{dF_\nu} - \frac{dp_{m+j}}{dF_\mu}\frac{dp_{m+i}}{dF_\nu}\right)(F_\mu, F_\nu).$$

Ainsi les formules (31) sont les conditions d'intégrabilité complète du système (28). Ces relations (31) ne sont plus des identités, mais elles deviennent identiques quand on y suppose $p_{m+1}, \ldots, p_{m-n}$ remplacés par leurs valeurs tirées des équations (28). Toutefois, si les constantes h étaient arbitraires, les formules (31) seraient identiques, parce que, ayant lieu quels que soient les h, on pourrait donner à ces constantes des valeurs choisies de telle sorte que les p_{m+i} prissent des valeurs arbitraires. Les formules $(F_\mu, F_\nu) = 0$, qui ont lieu quels que soient les h, auraient donc lieu aussi quels que soient les p_{m+i}.

Pour résoudre les équations (28), il faudrait pouvoir former les équations (11) et (12) et pour cela il faudrait calculer les valeurs des dérivées partielles $\frac{df_i}{dp_j}, \frac{df_i}{dx_j}$. Or, en différentiant les formules (28) par rapport à p_i, on a

$$\frac{dF_1}{dp_i} + \frac{dF_1}{df_1}\frac{df_1}{dp_i} + \frac{dF_1}{df_2}\frac{df_2}{dp_i} + \ldots + \frac{dF_1}{df_n}\frac{df_n}{dp_i} = 0,$$
$$\frac{dF_2}{dp_i} + \frac{dF_2}{df_1}\frac{df_1}{dp_i} + \frac{dF_2}{df_2}\frac{df_2}{dp_i} + \ldots + \frac{dF_2}{df_n}\frac{df_n}{dp_i} = 0;$$

de là on pourrait tirer $\frac{df_1}{dp_i}, \frac{df_2}{dp_i}, \ldots$, et par suite on pourrait former la $i^{\text{ème}}$ équation (11) en portant ces valeurs de $\frac{df_1}{dp_i}, \frac{df_2}{dp_i}, \ldots$ dans (4); mais, au lieu de faire cette substitution, on peut éliminer par tout autre moyen les $\frac{df_k}{dp_i}$ entre les équations précédentes et les équations (11). On trouve alors m équations dont le type est

$$\begin{vmatrix} dx_i & dt_1 & dt_2 & \ldots & dt_n \\ \frac{dF_1}{dp_i} & \frac{dF_1}{df_1} & \frac{dF_1}{df_2} & \ldots & \frac{dF_1}{df_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{dF_n}{dp_i} & \frac{dF_n}{df_1} & \frac{dF_n}{df_2} & \ldots & \frac{dF_n}{df_n} \end{vmatrix} = 0.$$

De même, les équations (12) peuvent être remplacées par m équations

dont le type est

$$\begin{vmatrix} -dp_i & dt_1 & dt_2 & \dots & dt_n \\ \frac{dF_1}{dx_i} & \frac{dF_1}{df_1} & \frac{dF_1}{df_2} & \dots & \frac{dF_1}{df_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{dF_n}{dx_i} & \frac{dF_n}{df_1} & \frac{dF_n}{df_2} & \dots & \frac{dF_n}{df_n} \end{vmatrix} = 0.$$

En tout cas, il faudra adjoindre à ces nouvelles équations les équations proposées elles-mêmes (28).

X.

Maintenant nous allons mettre à profit les remarques précédentes pour améliorer la méthode d'intégration que nous venons d'exposer. Désignons par u la fonction inconnue, par $x_1, x_2, \dots, x_{m+n}$ les variables et posons

$$\frac{du}{dx_1} = p_1, \quad \frac{du}{dx_2} = p_2, \quad \dots, \quad \frac{du}{dx_{m+n}} = p_{m+n}$$

Si nous supposons que la fonction u elle-même n'entre pas dans les équations à intégrer, celles-ci pourront se mettre sous la forme

(32) $$p_1 - f_1 = 0, \quad p_2 - f_2 = 0, \quad \dots, \quad p_n - f_n = 0.$$

Si l'on parvenait à adjoindre à ces n équations m autres équations renfermant m constantes arbitraires et satisfaisant aux conditions d'intégrabilité complète, le système (32) et le système adjoint détermineraient les p en fonction des x et l'on calculerait u au moyen de la formule

$$u = u^0 + \int \Sigma p\, dx;$$

on aurait ainsi une solution complète. La méthode de Jacobi consiste précisément à rechercher le système adjoint; nous allons exposer rapidement la méthode de Jacobi modifiée par M. Mayer.

Essayons d'abord d'adjoindre aux équations proposées (32) une équation

(33) $$F_1 = h_1,$$

renfermant la constante arbitraire h_1 et formant avec celles-ci un système complétement intégrable; si l'on suppose $p_1, p_2, \ldots, p_n$ éliminés de F_1 et remplacés par leurs valeurs $f_1, f_2, \ldots, f_n$ la fonction F_1 devra satisfaire aux équations

$$(34)\quad (p_1 - f_1, F_1) = 0, \quad (p_2 - f_2, F_1) = 0, \quad \ldots, \quad (p_n - f_n, F_1) = 0.$$

Ces équations ne contenant aucune des quantités $p_1, p_2, \ldots, p_n$ devront être identiques quand p_{n+1} y aura été remplacé par sa valeur déduite de (33); mais, h_1 étant arbitraire, p_{n+1} l'est aussi et les formules (34) devront avoir lieu quel que soit p_{n+1}; elles devront être identiques. Les équations (34) devant être identiques, on peut les considérer comme des équations linéaires aux dérivées partielles définissant la fonction F_1. Jacobi trouvait la fonction F_1 par un procédé que nous n'avons pas à rappeler ici. M. Mayer se contente de trouver *une* intégrale du système des équations (34); ces équations développées prennent les formes

$$\frac{dF_1}{dx_1} = -\frac{df_1}{dx_{n+1}}\frac{dF_1}{dp_{n+1}} + \frac{df_1}{dp_{n+1}}\frac{dF_1}{dx_{n+1}} - \frac{df_1}{dx_{n+2}}\frac{dF_1}{dp_{n+2}} + \frac{df_1}{dp_{n+2}}\frac{dF_1}{dx_{n+2}} + \cdots,$$
$$\frac{dF}{dx_2} = -\frac{df_2}{dx_{n+1}}\frac{dF_1}{dp_{n+1}} + \frac{df_2}{dp_{n+1}}\frac{dF_1}{dx_{n+1}} - \frac{df_2}{dx_{n+2}}\frac{dF_1}{dp_{n+2}} + \cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

et s'intègrent au moyen des équations aux différences totales

$$(35)\quad \left\{\begin{array}{l} -dx_{n+1} = \dfrac{df_1}{dp_{n+1}}dx_1 + \dfrac{df_2}{dp_{n+1}}dx_2 + \ldots + \dfrac{df_n}{dp_{n+1}}dx_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ dp_{n+1} = \dfrac{df_1}{dx_{n+1}}dx_1 + \dfrac{df_2}{dx_{n+1}}dx_2 + \ldots + \dfrac{df_n}{dx_{n+1}}dx_n. \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right.$$

Ces équations sont précisément celles auxquelles on est conduit par la méthode exposée plus haut; mais, tandis qu'il fallait tout à l'heure les intégrer complétement, il suffit ici d'en trouver *une* intégrale. Cette intégrale, étant désignée par $F_1 = h_1$, sera précisément l'une des équations à adjoindre au système proposé (32). En opérant alors sur le système (32), (33) comme on a opéré sur le système (32), on finira par

trouver un système de $m+n$ équations qui permettront de calculer tous les p. Une simple quadrature fournira alors la solution complète du système (32).

En théorie, cette méthode d'intégration est plus simple que celle que nous avons indiquée tout d'abord, parce qu'elle n'exige pas l'intégration complète du système (35), identique au système (11), (12); mais elle exige la formation de m systèmes successifs analogues au système (35) et la formation successive de ces systèmes peut être laborieuse ou même complétement impossible. La première méthode peut encore devenir de beaucoup la plus simple, si le théorème de Poisson s'applique avec succès au système canonique auquel on est conduit; ainsi chacune des méthodes a ses avantages et ses inconvénients.

Rien n'empêche, d'ailleurs, de combiner les deux méthodes et de faire usage de la première dès que l'on rencontrera des équations aux différences totales facilement intégrables. On peut encore combiner les deux méthodes comme il suit, après avoir ramené l'intégration des équations simultanées que nous prendrons sous la forme (4) à l'intégration des équations canoniques

$$-dx_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} d\vartheta_1, \quad -dx_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2} d\vartheta_1, \quad \ldots,$$
$$dp_1 = \frac{\partial H}{\partial x_1} d\vartheta_1, \qquad dp_2 = \frac{\partial H}{\partial x_2} d\vartheta_1, \quad \ldots.$$

On peut observer que l'intégration de ces dernières équations revient à la recherche d'une solution complète de l'équation unique aux dérivées partielles du premier ordre

$$(36) \qquad \frac{\partial S}{\partial \theta_1} = H,$$

où l'on a remplacé dans H les quantités $p_1, p_2, \ldots, p_m$ par $\frac{\partial S}{\partial x_1}$, $\frac{\partial S}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial x_m}$, et l'on peut appliquer à cette équation unique la méthode de Jacobi modifiée par M. Mayer.

Les deux méthodes ainsi combinées constitueront une véritable méthode d'abaissement, et, en effet, chaque fois que l'on pourra ajouter

au système (12) une nouvelle équation $F_s = h_s$ satisfaisant aux conditions d'intégrabilité complète, on diminuera de deux unités le nombre des variables de l'équation unique (36), à laquelle on est ramené.

La première méthode est susceptible de simplifications que nous allons indiquer. Si l'intégration des équations (11) et (12) présente quelques difficultés, on commencera par en chercher seulement deux intégrales, $\alpha = \text{const.}$ et $\beta = \text{const.}$; puis, appliquant le théorème du § V, qui, d'ailleurs, n'est autre que le théorème de Poisson, on formera la combinaison $(\alpha, \beta) = \gamma$. Si $\gamma = \text{const.}$ est une nouvelle intégrale, on la combinera avec α et β de manière à trouver encore de nouvelles intégrales; dans certains cas, on pourra ainsi achever l'intégration des équations (11), (12) sans autres opérations que de simples différentiations. La méthode n'exigera donc que la recherche de deux intégrales du système (11), (12).

S'il arrive que la combinaison (α, β) ne fournisse pas de nouvelle intégrale, c'est que (α, β) sera ou constant ou fonction de α et β; si (α, β) est identiquement nul, on pourra immédiatement adjoindre les équations $\alpha = \text{const.}$ et $\beta = \text{const.}$ aux équations (4) et en profiter ainsi pour simplifier ce système. Si (α, β) est identiquement constant, cette circonstance pourra être utilisée si l'on a encore une autre intégrale γ telle que (α, γ) soit constant. En effet, supposons

$$(\alpha, \beta) = a, \quad (\alpha, \gamma) = b;$$

on aura

$$\left(\alpha, \frac{\beta}{a}\right) - \left(\alpha, \frac{\gamma}{b}\right) = \left(\alpha, \frac{\beta}{a} - \frac{\gamma}{b}\right) = 0,$$

et α et $\frac{\beta}{a} - \frac{\gamma}{a}$ seront deux intégrales nouvelles satisfaisant aux conditions d'intégrabilité.

XI.

Proposons-nous d'intégrer les équations suivantes, où $p = \frac{du}{dx}$, $q = \frac{du}{dy}$.

$$(a) \quad \begin{cases} \dfrac{du}{ds} = 2p^2x^2s - pqxyt, \\[2ex] \dfrac{du}{dt} = 2q^2y^2t - pqxys. \end{cases}$$

On peut constater que ces équations sont complétement intégrables; pour les intégrer, il faut d'abord intégrer les équations aux différences totales

$$(b)\qquad \begin{cases} -dx = (4px^2s - qxyt)\,ds - qxys\,dt, \\ -dy = -pxyt\,ds + (4qy^2t - pxys)\,dt, \\ \quad dp = (4p^2xs - pqyt)\,ds - pqys\,dt, \\ \quad dy = -pqxt\,ds + (4q^2yt - pqxs)\,dt. \end{cases}$$

La première et la troisième équation de ce système, multipliées respectivement par p et par x, puis retranchées l'une de l'autre, donnent

$$p\,dx + x\,dp = 0;$$

la seconde et la quatrième donnent de même

$$q\,dy + y\,dq = 0,$$

d'où l'on tire facilement

$$(c)\qquad px = p_0x_0, \quad qy = q_0y_0,$$

l'indice zéro indiquant que l'on doit supposer, dans l'expression qui en est affectée, $s = s_0$, $t = t_0$. Si l'on se sert des deux premières intégrales trouvées pour éliminer p et q des équations (b), on trouve

$$\begin{aligned} -dx &= (4p_0x_0xs - q_0y_0xt)\,ds - q_0y_0xs\,dt, \\ -dy &= (4q_0y_0yt - p_0x_0ys)\,dt - p_0x_0yt\,ds, \end{aligned}$$

ce que l'on peut écrire

$$\begin{aligned} -\frac{dx}{x} &= 4p_0x_0s\,ds - q_0y_0(t\,ds + s\,dt) \\ -\frac{dy}{y} &= 4q_0y_0t\,dt - p_0x_0(t\,ds + s\,dt); \end{aligned}$$

on en déduit, en intégrant,

$$\log \frac{x_0}{x} = 2p_0 x_0 (s^2 - s_0^2) - q_0 y_0 (st - s_0 t_0),$$

$$\log \frac{y_0}{y} = 2q_0 y_0 (t^2 - t_0^2) - p_0 x_0 (st - s_0 t_0).$$

Rien n'empêche de supposer $t_0 = 0$, $s_0 = 0$: cela simplifiera un peu ces dernières formules, qui deviendront

$$(d) \quad \begin{cases} \log \dfrac{x_0}{x} = 2p_0 x_0 s^2 - q_0 y_0 st, \\ \log \dfrac{y_0}{y} = 2q_0 y_0 t^2 - p_0 x_0 st. \end{cases}$$

Il reste à effectuer les calculs dans l'équation

$$u = u_0 + \int [p\,dx + q\,dy + (2p^2x^2s - pqxyt)ds + (2q^2y^2t - pqxys)dt];$$

en y remplaçant p, q, x, y par leurs valeurs tirées de (c) et (d), on a

$$u = u_0 + \int \left[p_0 x_0 \frac{dx}{x} + q_0 y_0 \frac{dy}{y} + 2p_0^2 x_0^2 s\,ds + 2q_0^2 y_0^2 t\,dt - p_0 q_0 x_0 y_0 (t\,ds + s\,dt)\right],$$

ou bien

$$(e) \quad \begin{cases} u = u_0 + p_0 x_0 \log \dfrac{x}{x_0} + q_0 y_0 \log \dfrac{y}{y_0} + p_0^2 x_0^2 s^2 \\ \qquad + q_0^2 y_0^2 t^2 - p_0 q_0 x_0 y_0 st. \end{cases}$$

Si l'on pose maintenant

$$(f) \qquad u_0 = \varpi(x_0, y_0), \quad \frac{du_0}{dx_0} = p_0, \quad \frac{du_0}{dy_0} = q_0,$$

en éliminant p, q, p_0, q_0, x_0, y_0 et u_0 entre les équations (c), (d), (e), (f), on aura l'intégrale générale des équations proposées. On peut obtenir une solution complète en éliminant seulement p, q, p_0, q_0 entre (b), (c), (d), (e) ou p_0 et q_0 entre (d) et (e) ; mais la manière la plus simple d'obtenir une solution complète consiste à particulariser la forme de

la fonction ϖ et à prendre

$$(g) \qquad \varpi = a \log x_0 + b \log y_0 + c,$$

a, b, c désignant trois constantes arbitraires. On a en effet alors

$$\frac{d\varpi}{dx_0} = p_0 = \frac{a}{x_0} \quad \text{et} \quad \frac{d\varpi}{dy_0} = q_0 = \frac{b}{y_0}$$

ou

$$(h) \qquad a = p_0 x_0, \quad b = q_0 y_0;$$

l'élimination de p_0, q_0, y_0, x_0, u_0 se fait alors très-simplement. En remplaçant dans (e) u_0 par $a \log x_0 + b \log y_0 + c$, $p_0 x_0$ par a et $q_0 y_0$ par b, on a

$$(k) \qquad u = c + a \log x + b \log y + a^2 s^2 + b^2 t^2 - abst.$$

On aurait pu arriver à ce résultat en simplifiant un peu les calculs; en effet, des équations (b) on tire les intégrales très-simples

$$(l) \qquad px = a, \quad qy = b,$$

lesquelles satisfont à la relation

$$(px, qy) = 0;$$

en adjoignant alors les formules (l) au système donné (a), on a quatre équations faisant connaître p, q, $\frac{du}{ds}$ et $\frac{du}{dt}$ en fonction de x, y, s, t et des arbitraires a, b. Si l'on intègre alors la différentielle

$$p\,dx + q\,dy + \frac{du}{ds} ds + \frac{du}{dt} dt,$$

on trouve précisément la formule (k).

XII.

Pour terminer cette théorie des équations aux dérivées partielles, il resterait à montrer comment on intègre le système (4) quand il admet une solution, sans cependant satisfaire aux conditions d'intégrabilité complète; mais nous n'avons rien à ajouter à ce que Bour a dit à ce sujet dans le XXXIXe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique* (*Mémoire sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier et du second ordre*).

Sur certaines propriétés métriques relatives aux polygones de Poncelet;

Par M. HALPHEN.

1. Le Mémoire de M. Weill, publié récemment dans le présent journal (t. IV, p. 265), contient plusieurs théorèmes nouveaux au sujet des polygones inscrits dans un cercle et circonscrits à un autre cercle. Parmi ces théorèmes, on remarque principalement le suivant, que l'auteur appelle fondamental (p. 268):

1° *Si une ligne polygonale est inscrite dans un cercle et circonscrite à un autre cercle, le centre des moyennes distances de m points de contact consécutifs de cette ligne avec le second cercle a pour lieu un cercle.*

2° *Si la ligne polygonale se ferme de manière à former un polygone, le centre des moyennes distances des points de contact des côtés de ce polygone avec le second cercle reste fixe pendant le déplacement du polygone.*

Je me propose de montrer comment cette proposition et d'autres semblables peuvent être déduites aisément de la théorie générale des fonctions doublement périodiques.

2. Proposition I. — *Soit* $F(z)$ *une fonction doublement périodique à deux infinis* α, α'; *soit* $a = \alpha - \alpha'$ *la différence de ces infinis. La somme*

$$\varphi(z) = F(z) + F(z+a) + F(z+2a) + \ldots + F[z+(m-1)a]$$

n'a que deux infinis, qui sont α *et* $\alpha' - (m-1)a$.

En effet, cette somme ne peut devenir infinie qu'avec un de ses éléments, c'est-à-dire si l'on a l'une des deux égalités suivantes :

$$z + ka = \alpha, \quad z + k'a = \alpha'.$$

Mais, d'après la valeur de a, on a simultanément

$$z + ka = \alpha, \quad z + (k - 1)a = \alpha'.$$

Donc, chaque fois qu'un terme de $\varphi(z)$ devient infini, un de ses contigus le devient en même temps. D'ailleurs, les résidus de $F(z)$ relatifs aux infinis α, α' sont, comme on sait, égaux et de signes opposés. On en conclut que, deux termes contigus devenant infinis en même temps, leur somme reste finie. Donc $\varphi(z)$ ne devient infini qu'avec les termes extrêmes, lesquels n'ont chacun qu'un seul contigu, ce qui démontre la proposition.

Corollaire. — *Si le produit ma est la somme de multiples des deux périodes, $\varphi(z)$ est une constante.* En effet, les deux termes extrêmes peuvent alors être envisagés comme contigus, et $\varphi(z)$ ne devient jamais infinie. Ce corollaire peut être généralisé comme il suit :

Proposition II. — *Soient α, α' les infinis, ω, ω' les périodes de $F(z)$. Soient aussi m, n, p, p' des entiers tels qu'on ait*

$$\frac{\alpha - \alpha'}{n} = \frac{p\omega + p'\omega'}{m} = a;$$

la somme précédemment désignée par $\varphi(z)$ est indépendante de z.

Car on a en même temps

$$z + ka = \alpha, \quad z + (k - n)a = \alpha',$$

et, en outre, les termes extrêmes étant contigus, les termes de la somme forment un cycle fermé.

3. Proposition III. — *Soient α l'un des infinis et β l'un des zéros de la fonction $F(z)$ dont les périodes sont ω, ω'. Si l'on a*

$$\frac{\beta - \alpha}{n} = \frac{p\omega + p'\omega'}{m} = a,$$

le produit $\psi(z) = F(z)F(z + a)F(z + 2a) \ldots F[z + (m - 1)a]$ est indépendant de z.

En effet, on a simultanément

$$z + ka = \alpha, \quad z + (k+n)a = \beta$$

et aussi

$$z + k'a = \alpha', \quad z + (k'-n)a = \alpha + \alpha' - \beta.$$

Puisque α, α' sont les deux infinis de $F(z)$ et β un de ses zéros, $(\alpha + \alpha' - \beta)$ est l'autre zéro. Donc, dans $\psi(z)$, deux facteurs distants de n rangs deviennent simultanément, l'un nul, l'autre infini, et le produit reste fini.

D'ailleurs, les m facteurs forment un cycle fermé. Donc $\psi(z)$ reste toujours finie; donc cette fonction est constante.

4. Les propositions précédentes peuvent fournir des propriétés des polygones de Poncelet, puisqu'on sait, depuis Jacobi, que ces polygones constituent une représentation de la multiplication de l'argument dans les fonctions doublement périodiques à deux infinis. Voici comment, en quelques mots, le principe de cette représentation peut être exposé.

Soit $F(z)$ une fonction doublement périodique à deux infinis. Prenons une constante a, et considérons les deux quantités x, x_1 :

$$(1) \qquad x = F(z), \quad x_1 = F(z+a).$$

Les éléments de la théorie des fonctions doublement périodiques nous enseignent que les variables x, x_1 sont liées par une relation algébrique, qui est symétrique et, en outre, du second degré par rapport à chacune de ces variables. Réciproquement, étant donnée une telle relation, on peut toujours choisir a et $F(z)$ de manière que la relation proposée résulte des équations (1).

Soient maintenant deux coniques A, B et P, P_1 les points de rencontre de A avec une tangente de B. A un point P correspondent deux points P_1, et réciproquement. Si l'on détermine chaque point P de A par les valeurs d'un paramètre x qui corresponde uniformément au point P, ce qui est possible, alors les paramètres x, x_1 des points P, P_1 sont liés par une relation algébrique du second degré en x et x_1 et symétrique. Donc ces paramètres sont liés par des relations telles que (1). En conséquence, si l'on construit une ligne polygonale inscrite dans A et circonscrite à B, les paramètres des sommets succes-

sifs P, P_1, ..., P_{m-1}, ... seront $F(z)$, $F(z+a)$, ..., $F[z+(m-1)a]$.

Pour que la ligne polygonale se ferme et forme un polygone de m sommets, il faut et il suffit qu'on ait

$$(2) \qquad F(z+ma) = F(z).$$

Cette égalité a lieu pour $2z+ma = \alpha+\alpha'$ si α, α' sont les infinis de $F(z)$. Cette équation détermine quatre points particuliers P. Si l'on prend l'un d'eux pour le premier sommet de la ligne polygonale, cette ligne se replie sur elle-même et se ferme sans constituer un polygone véritable. On voit aisément quels sont ces points P. Si m est un nombre pair, P est le sommet de rang $\frac{m}{2}+1$ d'une ligne polygonale dont le premier sommet est l'un des quatre points communs à A et B. Si, au contraire, m est un nombre impair, P est le sommet de rang $\frac{m+1}{2}$ d'une ligne polygonale dont l'extrémité est le point de contact de A avec une des tangentes communes.

Soient ω, ω' les périodes de $F(z)$. Si l'on a $ma = p\omega + p'\omega'$, alors l'équation (2) a lieu quel que soit z. D'où le théorème de Poncelet : *S'il existe un véritable polygone fermé, inscrit dans une conique et circonscrit à une autre conique, il existe une infinité d'autres polygones jouissant des mêmes propriétés relativement à ces deux mêmes coniques.*

Ce qui vient d'être dit pour les sommets P de la ligne polygonale s'applique exactement aussi aux points Q où les côtés de cette ligne touchent la conique B.

5. Soient u, v, w les coordonnées homogènes d'un point par rapport à un triangle de référence ayant deux sommets $u=w=0$ et $v=w=0$ en deux points communs à A, B. A un point Q de B correspond uniformément le paramètre $x=\frac{u}{w}$. Soient Q, Q_1, Q_2, ... les points de contact successifs de B avec une ligne polygonale inscrite dans A. Le paramètre $\frac{u_k}{w_k}$ du point Q_k sera de la forme $F(z+ka)$. Considérons la somme

$$(3) \qquad mX = \frac{u}{w} + \frac{u_1}{w_1} + \frac{u_2}{w_2} + \ldots + \frac{u_{m-1}}{w_{m-1}},$$

et observons que $\frac{u}{w}$ ne devient infini qu'au point $v=w=0$. Ce point,

commun à A, B, est la réunion de deux points de contact successifs. Il existe donc une valeur de z qui rend simultanément infinis $F(z)$ et $F(z+a)$. Donc a est la différence des infinis de $F(z)$. Donc la somme (3) est analogue à celle qui fait l'objet de la proposition I. Donc X ne devient infini que pour $z=\alpha$ et $z=\alpha'-(m-1)a$. Les deux lignes polygonales correspondantes n'en forment qu'une Ω, mais décrite dans deux sens différents. C'est celle dont le premier sommet est au point $v=w=0$. Considérons en même temps la somme

$$mY = \frac{v}{w} + \frac{v_1}{w_1} + \ldots + \frac{v_{m-1}}{w_{m-1}},$$

et soit η la valeur de Y correspondant à la ligne polygonale Ω.

Par les mêmes raisonnements, on voit que Y ne devient infini que lorsque la ligne polygonale a pour extrémité le point $v=w=0$. Soit ξ la valeur de X qui répond à cette ligne polygonale. Considérons maintenant l'expression $(X-\xi)(Y-\eta)$. Il est manifeste que cette fonction de z ne devient jamais infinie. C'est donc une simple constante h. Remplaçons X, Y par les rapports des coordonnées U, V d'un point à la coordonnée W. Ce point a donc pour lieu la conique dont l'équation est

$$(U-\xi W)(V-\eta W) = hW^2.$$

D'où cette proposition :

Si dans une conique A *on inscrit une ligne polygonale quelconque qui soit en même temps circonscrite à une autre conique* B, *le centre des moyennes harmoniques de* m *points de contact successifs de cette ligne avec* B, *par rapport à une corde commune aux deux coniques, a pour lieu une troisième conique fixe qui a aussi avec* A, B *cette même corde commune.*

Si maintenant on a $ma = p\omega + p'\omega'$, alors, suivant le corollaire de la proposition I, X et Y sont eux-mêmes constants. Donc :

Si la ligne polygonale se ferme et constitue un polygone de m *côtés, le même centre des moyennes harmoniques reste fixe quand le polygone varie.*

Si la corde commune envisagée s'éloigne indéfiniment, ces propositions se changent en les théorèmes de M. Weill ci-dessus rappelés.

6. La double proposition qui vient d'être démontrée provient de ce fait que a est la différence des infinis de la fonction doublement périodique à envisager. La même circonstance a lieu si l'on considère les sommets de la ligne polygonale sur A et que les rencontres de A avec la droite $w = 0$ soient les points de contact de deux tangentes communes à A et à B. On est ainsi conduit à une proposition concernant le centre des moyennes harmoniques des sommets de la ligne polygonale; ce n'est, au reste, qu'une conséquence de la proposition précédente. Mais, au moyen de la proposition II, on obtient un théorème plus général, comme je vais l'indiquer.

7. Désignons maintenant par u, v, w les coordonnées d'un point de A, le triangle de référence ayant deux sommets $u = w = 0$ et $v = w = 0$ sur A; envisageons une ligne polygonale de sommets P, P_1, ..., P_{m-1}, et considérons encore la somme (3); supposons que le polygone soit fermé et qu'ainsi $ma = p\omega + p'\omega'$; comment choisir le triangle de référence pour que l'on ait aussi $\alpha - \alpha' = na$ et qu'on puisse ainsi appliquer la proposition II? D'après le n° 4, il faut et il suffit, pour qu'il en soit ainsi, que le point $v = w = 0$ soit un sommet d'une ligne polygonale ayant pour extrémité un point commun aux deux coniques ou bien le point de contact d'une tangente commune. Cela étant, X reste constant quand z varie. On a donc le théorème suivant :

Soient inscrits dans une conique A *des polygones* Ω *circonscrits à une autre conique* B. *Considérons des lignes polygonales particulières, inscrites à* A *et circonscrites à* B, *savoir :* 1° *celle dont le premier sommet* P *est un quelconque des points communs à* A *et* B, *et désignons par* P_1, P_2, ... *ses divers sommets;* 2° *celle dont le premier sommet* M *est le point de contact d'une tangente commune à* A *et* B, *et désignons par* M_1, M_2, ... *ses divers sommets. Prenons pour axe des moyennes harmoniques une droite quelconque passant par l'un des points* P_1, P_2, ... *ou* M, M_1, M_2, ..., *et soit* G *le point où cet axe rencontre de nouveau la conique* A : *le centre des moyennes harmoniques des sommets du polygone* Ω *a pour lieu une ligne droite passant par le point* G.

Si le point G *coïncide avec un autre des points* P_1, P_2, ... *ou* M, M_1, M_2, ..., *ce même centre des moyennes harmoniques reste fixe quand le polygone* Ω *varie.*

On peut ajouter encore, soit en répétant un raisonnement tout pareil, soit en le déduisant de l'énoncé précédent :

Soient P, Q_1, Q_2, ... *les points de contact de* B *avec la ligne polygonale* P, P_1, ..., *et* N, N_1, N_2, ... *avec la ligne polygonale* M, M_1, M_2, ... *Prenons pour axe des moyennes harmoniques une droite passant par l'un des points* P, Q_1, Q_2, ... *ou* N_1, N_2, ..., *et soit* H *le point où cet axe rencontre de nouveau la conique* B. *Le centre des moyennes harmoniques des points de contact du polygone* Ω *avec* B *a pour lieu une ligne droite passant par le point* H.

Si le point H *est lui-même l'un des points* P, Q_1, Q_2, ... *ou* N_1, N_2, ..., *ce même centre des moyennes harmoniques reste fixe quand le polygone* Ω *varie.*

Il faut observer que ces divers points P, P_1, ... sont en nombre limité, comme il résulte de l'hypothèse qu'il existe des polygones Ω. On peut facilement trouver le nombre de ces points, et je me contente d'énoncer ce résultat :

Si m *est le nombre des côtés des polygones* Ω, *les points* P_1, P_2, ..., M, M_1, M_2, ... *sont, en totalité, au nombre de* $2(m-1)$. *Il en est de même des points* P, Q_1, Q_2, ..., N_1, N_2, ... *Il existe donc* $(m-1)(2m-3)$ *axes par rapport à chacun desquels le centre des moyennes harmoniques des sommets du polygone* Ω *est fixe, et tout autant d'axes par rapport à chacun desquels la même circonstance a lieu pour le centre des moyennes harmoniques des points de contact de ce polygone avec* B.

8. En appliquant la proposition III, on obtient un théorème d'un genre différent. Soit $f(z)$ la fonction doublement périodique qui figure les différents sommets d'un polygone Ω. Si l'on fait

$$F(z) = \frac{f(z) - f(Z)}{f(z) - f(Z + na)},$$

Z étant une constante arbitraire et n un nombre entier, on obtient, dans le cas où les polygones Ω sont fermés, une fonction F(z) qui

satisfait aux conditions de l'énoncé de la proposition III. Pour donner au résultat obtenu de la sorte une forme géométrique, il suffit de considérer $f(z)$ comme le rapport anharmonique formé sur la conique A par le point P et trois points fixes. Si l'on suppose que deux des points fixes soient à l'infini sur un cercle, la forme de l'énoncé devient plus simple, et la voici :

Soient Ω, Ω' deux polygones, le premier variable, le second fixe, inscrits dans un cercle et circonscrits à une conique : le produit des distances d'un sommet fixe de Ω' à tous les sommets de Ω est au produit des distances d'un autre sommet fixe de Ω' à tous les sommets de Ω dans un rapport constant.

9. Au lieu de fixer chaque point de la conique A par les valeurs d'un paramètre dans la définition duquel figure seulement la conique A elle-même, on peut employer des paramètres qui soient définis par la figure composée des deux coniques. Par exemple, ainsi que l'a fait M. Mention [*], on peut fixer la position du point P par la cotangente du demi-angle que font entre elles les tangentes menées de P à B, les coniques A et B étant toutes deux censées des cercles. On trouve aisément alors que ce nouveau paramètre, pour les côtés successifs d'une ligne polygonale inscrite à A et circonscrite à B, est figuré par les valeurs successives de $F(z+na)$, $F(z)$ étant toujours une fonction elliptique. Voici, par exemple, un des résultats qu'on peut immédiatement déduire de la proposition II, en se plaçant à ce nouveau point de vue :

Soient des polygones Ω inscrits dans un cercle et circonscrits à un autre cercle. Désignons par P, P_1, P_2, ... les sommets d'un de ces polygones, et par Q, Q_1, ... les points de contact du second cercle respectivement avec les côtés PP_1, P_1P_2, ... Soit, en outre, l la longueur d'une tangente commune aux deux cercles.

Quel que soit le polygone Ω, la quantité suivante est constante, savoir :

$$\frac{1}{PQ - l} + \frac{1}{P_1Q_1 - l} + \frac{1}{P_2Q_2 - l} + \ldots = \text{const.}$$

[*] *Mélanges mathématiques et astronomiques*, t. III. Saint-Pétersbourg, mai 1859.

Solution du cas irréductible, c'est-à-dire du problème consistant à exprimer les racines d'une équation complète du troisième degré comme fonctions algébriques, finies et numériquement calculables sous forme finie, des coefficients de cette équation, dans le cas où ces racines sont toutes à la fois réelles et au moins une d'elles commensurable [*];

Par M. Guido WEICHOLD,

Professeur à Zittau (Saxe).

En désignant par a, b, c les racines de l'équation générale du troisième degré

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0, \tag{1}$$

---

[*] De cette définition du problème du cas irréductible il résulte évidemment :

1° Que la résolution d'une pareille équation au moyen des fonctions trigonométriques n'est nullement une solution du cas irréductible, pas plus que la division d'un angle en trois parties égales au moyen d'un rapporteur ne serait la solution du problème de la trisection d'un angle, puisque cette résolution revient en dernier lieu à la consultation de tables, où les racines de toutes les équations particulières de ce genre sont calculées d'avance *par approximation* et spécifiées en face de chaque cas particulier. Les racines de l'équation proposée ainsi exprimées au moyen des fonctions trigonométriques ne sont d'ailleurs ni fonctions algébriques, ni fonctions finies des coefficients de cette équation;

2° Que le cas où les trois racines de l'équation proposée sont toutes incommensurables à la fois n'entre pas dans le problème du cas irréductible, puisqu'il serait aussi absurde d'exiger que l'on exprimât ces racines numériquement exactes et sous forme

et par θ et θ' les racines cubiques complexes [*] de l'unité, c'est-à-dire

$$\theta = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \quad \theta' = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2},$$

on a, en posant

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} a + \theta b + \theta' c &= \frac{(2a-b-c)+(b-c)\sqrt{-3}}{2} = \rho, \\ a + \theta' b + \theta c &= \frac{(2a-b-c)-(b-c)\sqrt{-3}}{2} = \rho', \\ bc + \theta ac + \theta' ab &= \frac{(2bc-ac-ab)-a(b-c)\sqrt{-3}}{2} = \rho_1, \\ bc + \theta' ac + \theta ab &= \frac{(2bc-ac-ab)+a(b-c)\sqrt{-3}}{2} = \rho'_1, \end{aligned} \right.$$

et en ayant égard aux relations connues, savoir :

$$a+b+c = -A, \quad ab+ac+bc = B, \quad abc = -C.$$

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} a &= \frac{-A+\rho+\rho'}{3} = -\frac{\rho_1-\rho'_1}{\rho-\rho'} = -\frac{2B-(\rho_1+\rho'_1)}{2A+(\rho+\rho')} = -\frac{3C}{B+(\rho_1+\rho'_1)}, \\ b &= \frac{-A+\theta'\rho+\theta\rho'}{3} = -\frac{\theta'\rho_1-\theta\rho'_1}{\theta'\rho-\theta\rho'} \\ &= -\frac{2B-(\theta'\rho_1+\theta\rho'_1)}{2A+(\theta'\rho+\theta\rho')} = -\frac{3C}{B+(\theta'\rho_1+\theta\rho'_1)}, \\ c &= \frac{-A+\theta\rho+\theta'\rho'}{3} = -\frac{\theta\rho_1-\theta'\rho'_1}{\theta\rho-\theta'\rho'} \\ &= -\frac{2B-(\theta\rho_1+\theta'\rho'_1)}{2A+(\theta\rho+\theta'\rho')} = -\frac{3C}{B+(\theta\rho_1+\theta'\rho'_1)}, \end{aligned} \right.$$

---

finie que de vouloir exiger que l'on extraie une racine d'un nombre entier positif qui n'est pas une puissance exacte du même degré d'un autre nombre entier exactement et sous forme finie, et puisque la détermination approximative des valeurs de ces racines incommensurables peut être effectuée par la formule de Cardan, en développant les racines cubiques qu'elle renferme en séries convergentes.

[*] Par conséquent, ρ, ρ', ρ_1, ρ'_1 sont des fonctions complexes *conjuguées* de a, b, c, si l'on entend par quantité complexe toute quantité composée de deux parties, dont l'une est réelle et l'autre imaginaire.

ou, collectivement,

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \left.\begin{matrix}a\\ b\\ c\end{matrix}\right\} &= \frac{-A+\left.\begin{matrix}1\\ \theta'\\ \theta\end{matrix}\right\}\rho+\left.\begin{matrix}1\\ \theta\\ \theta'\end{matrix}\right\}\rho'}{3} = -\frac{\left.\begin{matrix}1\\ \theta'\\ \theta\end{matrix}\right\}\rho_1-\left.\begin{matrix}1\\ \theta\\ \theta'\end{matrix}\right\}\rho'_1}{\left.\begin{matrix}1\\ \theta'\\ \theta\end{matrix}\right\}\rho-\left.\begin{matrix}1\\ \theta\\ \theta'\end{matrix}\right\}\rho'} \\ &= -\frac{2B-\left.\begin{matrix}1\\ \theta'\\ \theta\end{matrix}\right\}\rho_1-\left.\begin{matrix}1\\ \theta\\ \theta'\end{matrix}\right\}\rho'_1}{2A+\left.\begin{matrix}1\\ \theta'\\ \theta\end{matrix}\right\}\rho+\left.\begin{matrix}1\\ \theta\\ \theta'\end{matrix}\right\}\rho'} = -\frac{3C}{B+\left.\begin{matrix}1\\ \theta'\\ \theta\end{matrix}\right\}\rho'+\left.\begin{matrix}1\\ \theta\\ \theta'\end{matrix}\right\}\rho'_1}. \end{aligned}\right.$$

Entre les quatre quantités auxiliaires ρ, ρ', ρ_1, ρ'_1 et les coefficients A, B, C de l'équation proposée, il existe les sept relations suivantes :

(5) I. $\rho\rho' = A^2 - 3B = N,$

(6) II. $\rho_1\rho'_1 = B^2 - 3AC = N',$

(7) III. $\rho\rho'_1 + \rho'\rho_1 = AB - 9C = P,$

(8) IV. $\rho^3 + \rho'^3 = 3P - 2AN = -2A^3 + 9AB - 27C,$

(9) V. $\rho_1^3 + \rho_1'^3 = -3CP + 2BN' = 2B^3 - 9ABC + 27C^2,$

(10) VI. $\rho^2\rho_1 + \rho'^2\rho'_1 = 3N' - BN = AP - 2BN = -A^2B + 6B^2 - 9AC,$

(11) VII. $\rho_1^2 + \rho'\rho_1'^2 = AN' + 3CN = 2AN' - BP = AB^2 - 6A^2C + 9BC,$

N, N', P étant des abréviations pour $A^2 - 3B$, $B^2 - 3AC$, $AB - 9C$.

En effet, on a

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} \rho\rho' &= \theta\rho.\theta'\rho' = \theta'\rho.\theta\rho' = (a+\theta b+\theta' c)(a+\theta' b+\theta c) \\ &= (b+\theta a+\theta' c)(b+\theta' a+\theta c) \\ &= (c+\theta a+\theta' b)(c+\theta' a+\theta b) \\ &= \tfrac{1}{4}\{[(a-b)+(a-c)]^2+3(b-c)]^2\} \\ &= \tfrac{1}{4}\{[(b-c)-(a-b)]^2+3(a-c)^2\} \\ &= \tfrac{1}{4}\{[(a-c)+(b-c)]^2+3(a-b)^2\}\,[*] \\ &= (a-b)^2-(a-b)(a-c)+(a-c)^2 \\ &= (b-c)^2+(b-c)(a-b)+(a-b)^2 \\ &= (a-c)^2-(a-c)(b-c)+(b-c)^2 \\ &= (a+b^2+c^2)-(ab+ac+bc) = A^2-3B, \end{aligned}\right.$$

[*] Ces expressions montrent que N et N' peuvent être réduits à la forme

$$\alpha^2 + 3\beta^2 = (\alpha + \beta\sqrt{-3})(\alpha - \beta\sqrt{-3})$$

$$(13)\left\{\begin{aligned}
\rho_1\rho'_1 &= \theta\rho_1\,\theta'\rho'_1 = \theta'\rho_1\,\theta\rho'_1 = (bc+\theta ab+\theta' ac)(bc+\theta' ab+\theta ac)\\
&= (ac+\theta ab+\theta' bc)(ac+\theta' ab+\theta bc)\\
&= (ab+\theta ac+\theta' bc)(ab+\theta' ac+\theta bc)\\
&= \tfrac{1}{4}\{[b(a-c)+c(a-b)]^2+3a^2(b-c)^2\}\\
&= \tfrac{1}{4}\{[c(a-b)-a(b-c)]^2+3b^2(a-c)^2\}\\
&= \tfrac{1}{4}\{[a(b-c)+b(a-c)]^2+3c^2(a-b)^2\}\,[^*]\\
&= b^2(a-c)^2-bc(a-b)(a-c)+c^2(a-b)^2\\
&= c^2(a-b)^2+ac(a-b)(b-c)+a^2(b-c)^2\\
&= a^2(b-c)^2-ab(b-c)(a-c)+b^2(a-c)^2\\
&= a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2-abc(a+b+c)=\mathrm{B}^2-3\mathrm{AC},
\end{aligned}\right.$$

$$(14)\left\{\begin{aligned}
\rho\rho'_1+\rho'\rho_1 &= \theta\rho.\theta'\rho'_1+\theta'\rho'.\theta\rho_1=\theta'\rho.\theta\rho'_1+\theta\rho'.\theta'\rho_1\\
&= (a+\theta b+\theta' c)(bc+\theta' ac+\theta ab)\\
&\quad+(a+\theta' b+\theta c)(bc+\theta ac+\theta' ab)\\
&= (c+\theta a+\theta' b)(ab+\theta' bc+\theta ac)\\
&\quad+(c+\theta' a+\theta b)(ab+\theta bc+\theta' ac)\\
&= (b+\theta c+\theta' a)(ac+\theta' ab+\theta bc)\\
&\quad+(b+\theta' c+\theta a)(ac+\theta ab+\theta' bc)\\
&= 6abc+(a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2)(\theta+\theta')\\
&= 9abc-(ab+ac+bc)(a+b+c)=\mathrm{AB}-9\mathrm{C},
\end{aligned}\right.$$

$$(15)\left\{\begin{aligned}
\rho^3+\rho'^3 &= (\rho+\rho')(\theta\rho+\theta'\rho')(\theta'\rho+\theta\rho')\\
&= (2a-b-c)(2b-a-c)(2c-a-b)\\
&= [(a-b)+(a-c)][(a-c)+(b-c)][(a-b)-(b-c)]\\
&= 2(a^3+b^3+c^2)-3(ab+ac+bc)(a+b+c)+27abc\\
&= -2\mathrm{A}^3+9\mathrm{AB}-27\mathrm{C}=3\mathrm{P}-2\mathrm{AN},
\end{aligned}\right.$$

---

quand les racines a, b, c sont réelles et entières, à la forme

$$\frac{\alpha^2+3\beta^2}{\gamma^2}=\left(\frac{\alpha+\beta\sqrt{-3}}{\gamma}\right)\left(\frac{\alpha-\beta\sqrt{-3}}{\gamma}\right)$$

quand elles sont réelles et fractionnaires, et enfin à la forme

$$\frac{\alpha^2+3\beta^2\lambda}{\gamma^2}=\frac{\alpha+\beta\sqrt{\lambda}\sqrt{-3}}{\gamma}\times\frac{\alpha-\beta\sqrt{\lambda}\sqrt{-3}}{\gamma}$$

quand elles sont réelles et une d'elles rationnelle et fractionnaire, et les deux autres des nombres irrationnels de la forme $\dfrac{m+n\sqrt{p}}{q}$ et $\dfrac{m-n\sqrt{p}}{q}$, α, β, γ, m et n étant des nombres entiers, et x, p et q des nombres entiers positifs.

[*] *Voir* la note de la page précédente.

$$(16)\left\{\begin{aligned}
\rho_1^3 + \rho_1'^3 &= (\rho_1 + \rho_1')(\theta\rho_1 + \theta'\rho_1')(\theta'\rho_1 + \theta\rho_1')\\
&= (2bc - ab - ac)(2ac - ab - bc)(2ab - ac - bc)\\
&= [b(a-c) + c(a-b)][a(b-c) - c(a-b)]\\
&\quad \times [a(b-c) + b(a-c)]\\
&= 2(a^3b^3 + a^3c^3 + b^3c^3) - 3abc(ab + ac + bc)\\
&\quad \times (a + b + c) + 27a^2b^2c^2\\
&= 2B^3 - 9ABC + 27C^2 = -3CP + 2BN'
\end{aligned}\right.$$

$$(17)\left\{\begin{aligned}
\rho^2\rho_1 + \rho'^2\rho_1' &= (\theta\rho)^2(\theta\rho_1) + (\theta'\rho')^2(\theta'\rho_1') = (\theta'\rho)^2(\theta'\rho_1) + (\theta\rho')^2(\theta\rho_1')\\
&= (a + \theta b + \theta' c)^2(bc + \theta' ab + \theta ac)\\
&\quad + (a + \theta' b + \theta c)^2(bc + \theta ab + \theta' ac)\\
&= (c + \theta a + \theta' b)^2(ab + \theta' ac + \theta bc)\\
&\quad + (c + \theta' a + \theta b)^2(ab + \theta ac + \theta' bc)\\
&= (b + \theta c + \theta' a)^2(ac + \theta' bc + \theta ab)\\
&\quad + (b + \theta' c + \theta a)^2(ac + \theta bc + \theta' ab)\\
&= -abc(a + b + c) + 4(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)\\
&\quad - (a^2 + b^2 + c^2)(ab + ac + bc)\\
&= -9AC + 6B^2 - A^2B = 3N' - BN = AP - 2BN,
\end{aligned}\right.$$

$$(18)\left\{\begin{aligned}
\rho\rho_1^2 + \rho'\rho_1'^2 &= (\theta\rho)(\theta\rho_1)^2 + (\theta'\rho')(\theta'\rho_1')^2 = (\theta'\rho)(\theta'\rho_1)^2 + (\theta\rho')(\theta\rho_1')^2\\
&= (a + \theta b + \theta' c)(bc + \theta ac + \theta' ab)^2\\
&\quad + (a + \theta' b + \theta c)(bc + \theta' ac + \theta ab)^2\\
&= (c + \theta a + \theta' b)(ab + \theta bc + \theta' ac)^2\\
&\quad + (c + \theta' a + \theta b)(ab + \theta' bc + \theta ac)^2\\
&= (b + \theta c + \theta' a)(ac + \theta' bc + \theta ab)^2\\
&\quad + (b + \theta' c + \theta a)(ac + \theta bc + \theta' ab)^2\\
&= -abc(ab + ac + bc) + 4abc(a^2 + b^2 + c^2)\\
&\quad - (a + b + c)(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)\\
&= 9BC - 6A^2C + AB^2 = AN' - 3CN = 2AN' - BP.
\end{aligned}\right.$$

De ces relations, on déduit

$$(19)\left\{\begin{aligned}
\rho\rho_1' - \rho'\rho_1 &= (a + \theta b + \theta' c)(bc + \theta' ac + \theta ab)\\
&\quad - (a + \theta' b + \theta c)(bc + \theta ac + \theta' ab)\\
&= (a-b)(a-c)(b-c)\sqrt{-3} = \sqrt{(\rho\rho_1' + \rho'\rho_1)^2 - 4\rho\rho'\rho_1\rho_1'}\\
&= \sqrt{P^2 - 4NN'} = S\sqrt{-3};
\end{aligned}\right.$$

en écrivant, pour abréger,

$$\sqrt{\frac{4NN'-P^2}{3}} = S,$$

$$(20)\left\{\begin{aligned}
\rho^3 - \rho'^3 &= (\rho-\rho')(\theta\rho-\theta'\rho')(\theta'\rho-\theta\rho')\\
&= 3(a-b)(a-c)(b-c)\sqrt{-3} = \sqrt{(\rho^3+\rho'^3)^2-4\rho^3\rho'^3}\\
&= \sqrt{(3P-2AN)^2-4N^3} = \sqrt{9P^2-12APN+4A^2N^2-4N^3}\\
&= \sqrt{9P^2-4N(N^2-A^2N+3AP)} = \sqrt{9P^2-4N.9N'}\\
&= 3\sqrt{P^2-4NN'} = 3S\sqrt{-3},
\end{aligned}\right.$$

$$(21)\left\{\begin{aligned}
\rho_1^3 - \rho_1'^3 &= (\rho_1-\rho_1')(\theta\rho_1-\theta'\rho_1')(\theta'\rho_1-\theta\rho_1')\\
&= -3abc(a-b)(a-c)(b-c)\sqrt{-3} = \sqrt{(\rho_1^3+\rho_1'^3)^2-4\rho_1^3\rho_1'^3}\\
&= \sqrt{(-3CP+2BN')^2-4N'^3}\\
&= \sqrt{9C^2P^2-12BCN'P+4B^2N'^2-4N'^3}\\
&= \sqrt{9C^2P^2-4N'(N'^2-B^2N'+3BCP)}\\
&= \sqrt{9C^2P^2-4N.9C^2N} = 3C\sqrt{P^2-4NN'} = 3CS\sqrt{-3},
\end{aligned}\right.$$

$$(22)\left\{\begin{aligned}
\rho^2\rho_1 - \rho'^2\rho_1' &= (a+\theta b+\theta' c)^2(bc+\theta' ab+\theta ac)\\
&\quad -(a+\theta' b+\theta c)^2(bc+\theta ab+\theta' ac)\\
&= (a+b+c)(a-b)(a-c)(b-c)\sqrt{-3}\\
&= \sqrt{(\rho^2\rho_1+\rho'^2\rho_1')^2-4\rho^2\rho'^2\rho_1\rho_1'} = \sqrt{(AP-2BN)^2-4N^2N'}\\
&= \sqrt{A^2P^2-4ABPN+4B^2N^2-4N^2N'}\\
&= \sqrt{A^2P^2-4N(NN'-B^2N+ABP)} = \sqrt{A^2P^2-4N.A^2N'}\\
&= A\sqrt{P^2-4NN'} = AS\sqrt{-3},
\end{aligned}\right.$$

$$(23)\left\{\begin{aligned}
\rho\rho_1^2 - \rho'\rho_1'^2 &= (a+\theta b+\theta' c)(bc+\theta' ab+\theta ac)^2\\
&\quad -(a+\theta' b+\theta c)(bc+\theta ab+\theta' ac)^2\\
&= (ab+ac+bc)(a-b)(a-c)(b-c)\sqrt{-3}\\
&= \sqrt{(\rho\rho_1^2+\rho'\rho_1'^2)^2-4\rho\rho'\rho_1^2\rho_1'^2} = \sqrt{(2AN'-BP)^2-4NN'^2}\\
&= \sqrt{4A^2N'^2-4ABPN'+B^2P^2-4NN'^2}\\
&= \sqrt{B^2P^2-4N'(NN'-A^2N'+ABP)} = \sqrt{B^2P^2-4N'.B^2N}\\
&= B\sqrt{P^2-4NN'} = BS\sqrt{-3},
\end{aligned}\right.$$

d'où

$$(24)\left\{\begin{aligned}
\rho\rho_1' &= \tfrac{1}{2}[(\rho\rho_1'+\rho'\rho_1)+(\rho\rho_1'-\rho'\rho_1)]\\
&= \tfrac{1}{2}(P+\sqrt{P^2-4NN'}) = \tfrac{1}{2}(P+S\sqrt{-3}),
\end{aligned}\right.$$

$$(25)\left\{\begin{aligned} \rho_1\rho' &= \tfrac{1}{2}[(\rho\rho'_1 + \rho'\rho_1) - (\rho\rho'_1 - \rho'\rho_1)] \\ &= \tfrac{1}{2}(\mathrm{P} - \sqrt{\mathrm{P}^2 - 4\mathrm{NN}'}) = \tfrac{1}{2}(\mathrm{P} - \mathrm{S}\sqrt{-3}), \end{aligned}\right.$$

$$(26)\qquad \rho^3 = \tfrac{1}{2}[(\rho^3 + \rho'^3) + (\rho^3 - \rho'^3)] = \tfrac{1}{2}(3\mathrm{P} - 2\mathrm{AN} + 3\mathrm{S}\sqrt{-3}),$$

$$(27)\qquad \rho'^3 = \tfrac{1}{2}[(\rho^3 + \rho'^3) - (\rho^3 - \rho'^3)] = \tfrac{1}{2}(3\mathrm{P} - 2\mathrm{AN} - 3\mathrm{S}\sqrt{-3}),$$

$$(28)\qquad \rho_1^3 = \tfrac{1}{2}[(\rho_1^3 + \rho'^3_1) + (\rho_1^3 - \rho'^3_1)] = \tfrac{1}{2}(-3\mathrm{CP} + 2\mathrm{BN}' + 3\mathrm{CS}\sqrt{-3}),$$

$$(29)\qquad \rho' = \tfrac{1}{2}[(\rho_1^3 + \rho'^3_1) - (\rho_1^3 - \rho'^3_1)] = \tfrac{1}{2}(-3\mathrm{CP} + 2\mathrm{BN}' - 3\mathrm{CS}\sqrt{-3}),$$

$$(30)\left\{\begin{aligned} \rho^2\rho_1 &= \tfrac{1}{2}[(\rho^2\rho_1 + \rho'^2\rho'_1) + (\rho^2\rho_1 - \rho'^2\rho'_1)] \\ &= \tfrac{1}{2}(3\mathrm{N}' - \mathrm{BN} + \mathrm{A}\sqrt{\mathrm{P}^2 - 4\mathrm{NN}'}) = \tfrac{1}{2}(\mathrm{AP} - 2\mathrm{BN} + \mathrm{AS}\sqrt{-3}), \end{aligned}\right.$$

$$(31)\left\{\begin{aligned} \rho'^2\rho'_1 &= \tfrac{1}{2}[(\rho^2\rho_1 + \rho'^2\rho'_1) - (\rho^2\rho_1 - \rho'^2\rho'_1)] \\ &= \tfrac{1}{2}(3\mathrm{N}' - \mathrm{BN} - \mathrm{A}\sqrt{\mathrm{P}^2 - 4\mathrm{NN}'}) = \tfrac{1}{2}(\mathrm{AP} - 2\mathrm{BN} - \mathrm{AS}\sqrt{-3}), \end{aligned}\right.$$

$$(32)\left\{\begin{aligned} \rho\rho_1^2 &= \tfrac{1}{2}[(\rho\rho_1^2 + \rho'\rho'^2_1) + (\rho\rho_1^2 - \rho'\rho'^2_1)] \\ &= \tfrac{1}{2}(\mathrm{AN}' - 3\mathrm{CN} + \mathrm{B}\sqrt{\mathrm{P}^2 - 4\mathrm{NN}'}) = \tfrac{1}{2}(2\mathrm{AN}' - \mathrm{BP} + \mathrm{BS}\sqrt{-3}), \end{aligned}\right.$$

$$(33)\left\{\begin{aligned} \rho'\rho'^2_1 &= \tfrac{1}{2}[(\rho\rho_1^2 + \rho'\rho'^2_1) - (\rho\rho_1^2 - \rho'\rho'^2_1)] \\ &= \tfrac{1}{2}(\mathrm{AN}' - 3\mathrm{CN} - \mathrm{B}\sqrt{\mathrm{P}^2 - 4\mathrm{NN}'}) = \tfrac{1}{2}(2\mathrm{AN}' - \mathrm{BP} - \mathrm{BS}\sqrt{-3}). \end{aligned}\right.$$

Les valeurs de $\rho\rho'_1$, $\rho'\rho_1$, ρ^3, ρ'^3, ρ_1^3, ρ'^3_1, $\rho^2\rho_1$, $\rho'^2\rho'_1$, $\rho\rho_1^2$, $\rho'\rho'^2_1$ sont complexes (*voir* la note de la p. 1), quand a, b, c sont simultanément réelles, comme le montre l'expression

$$\mathrm{S} = (a-b)(a-c)(b-c) = \sqrt{\frac{4\mathrm{NN}' - \mathrm{P}^2}{3}}.$$

Donc, si l'on voulait déterminer les valeurs de ρ, ρ', ρ_1, ρ'_1 par l'extraction de la racine cubique de

$$\begin{aligned} \rho^3 &= \tfrac{1}{2}(3\mathrm{P} - 2\mathrm{AN} + 3\mathrm{S}\sqrt{-3}), \\ \rho'^3 &= \tfrac{1}{2}(3\mathrm{P} - 2\mathrm{AN} - 3\mathrm{S}\sqrt{-3}), \\ \rho_1^3 &= \tfrac{1}{2}(-3\mathrm{CP} + 2\mathrm{BN}' + 3\mathrm{CS}\sqrt{-3}), \\ \rho'^3_1 &= \tfrac{1}{2}(-3\mathrm{CP} + 2\mathrm{BN}' + 3\mathrm{CS}\sqrt{-3}), \end{aligned}$$

respectivement, on tomberait sur le cas irréductible, c'est-à-dire on aurait à extraire la racine cubique de quantités complexes, ce qu'on ne sait pas encore effectuer sous forme finie et par des opérations élémentaires. Mais les valeurs de ces quatre quantités auxiliaires ρ, ρ',

ρ_1, ρ_1' peuvent être déterminées sous forme finie par une opération élémentaire *autre* que l'extraction de la racine cubique, quand les racines a, b, c sont toutes réelles et une d'elles au moins commensurable, savoir par la détermination d'un facteur complexe commun à deux quantités complexes toutes les deux, ou l'une au moins.

En effet, en observant que

(3)

I. $\rho\rho'$ et $\rho\rho_1'$ ont le facteur complexe ρ commun, de même que $\rho_1\rho_1'$ et $\rho'\rho_1$ le facteur ρ_1,
$\rho\rho'$ » $\rho'\rho_1$ » » ρ' » » $\rho_1\rho_1'$ » ρ_1' » ρ_1';

II. $\rho\rho'$ et ρ^3 ont le facteur complexe ρ commun, de même que $\rho_1\rho_1'$ et ρ_1^3 le facteur ρ_1,
$\rho\rho'$ » ρ'^3 » » ρ' » » $\rho_1\rho_1'$ » $\rho_1'^3$ » ρ_1';

III. $\rho\rho'$ et $\rho^2\rho_1$ ont le facteur complexe ρ commun, de même que $\rho_1\rho_1'$ et $\rho^2\rho_1$ le facteur ρ_1,
$\rho\rho'$ » $\rho'^2\rho_1'$ » » ρ' » » $\rho_1\rho_1'$ » $\rho'^2\rho_1'$ » ρ_1';

IV. $\rho\rho'$ et $\rho\rho_1^2$ ont le facteur complexe ρ commun, de même que $\rho_1\rho_1'$ et $\rho\rho_1^2$ le facteur ρ_1,
$\rho\rho'$ » $\rho'\rho_1'^2$ » » ρ' » » $\rho_1\rho_1'$ » $\rho'\rho_1'^2$ » ρ_1';

V. $\rho\rho_1'$ et $\rho^2\rho_1$ ont le facteur complexe ρ commun, de même que $\rho'\rho_1$ et $\rho^2\rho_1$ le facteur ρ_1,
$\rho'\rho_1$ » $\rho'^2\rho_1'$ » » ρ' » » $\rho\rho_1'$ » $\rho'^2\rho_1'$ » ρ_1';

VI. $\rho\rho'$ et $\rho\rho_1^2$ ont le facteur complexe ρ commun, de même que $\rho'\rho_1$ et $\rho\rho_1^2$ le facteur ρ_1,
$\rho'\rho_1$ » $\rho'\rho_1'^2$ » » ρ' » » $\rho\rho_1'$ » $\rho'\rho_1'^2$ » ρ_1';

VII. $\rho\rho_1'$ et ρ^3 ont le facteur complexe ρ commun, de même que $\rho'\rho_1$ et ρ_1^3 le facteur ρ_1,
$\rho'\rho_1$ » ρ'^3 » » ρ' » » $\rho\rho_1'$ » $\rho_1'^3$ » ρ_1';

VIII. $\rho\rho_1^2$ et ρ^3 ont le fact. compl. ρ commun, de même que $\rho\rho_1^2$ et ρ_1^3 le fact. ρ_1^2, d'où $\rho_1 = \sqrt{\overline{\overline{\rho\rho_1^2 \mid \rho_1^3}}}$ [*],
$\rho'\rho_1'^2$ » ρ'^3 » » ρ' » » $\rho'\rho_1'^2$ » $\rho_1'^3$ » $\rho_1'^2$, » $\rho_1' = \sqrt{\overline{\overline{\rho'\rho_1'^2 \mid \rho_1'^3}}}$;

IX. $\rho^2\rho_1$ et ρ^3 ont le fact. compl. ρ^2, d'où $\rho = \sqrt{\overline{\overline{\rho^2\rho_1 \mid \rho^3}}}$, de même que $\rho^2\rho_1$ et ρ_1^3 le facteur ρ_1,
$\rho'^2\rho_1'$ » ρ'^3 » » ρ'^2 » $\rho' = \sqrt{\overline{\overline{\rho'^2\rho_1' \mid \rho'^3}}}$, » $\rho'^2\rho_1'$ » $\rho_1'^3$ » ρ_1';

X. $\rho^2\rho_1$ et $\rho\rho_1^2$ ont le facteur complexe $\rho\rho_1$, d'où $\rho = \dfrac{\rho^2\rho_1}{\overline{\rho^2\rho_1 \mid \rho\rho_1^2}}$ et $\rho_1 = \dfrac{\rho\rho_1^2}{\overline{\rho^2\rho_1 \mid \rho\rho_1^2}}$,
$\rho'^2\rho_1'$ » $\rho'\rho_1'^2$ » » $\rho'\rho_1'$, » $\rho' = \dfrac{\rho'^2\rho_1'}{\overline{\rho'^2\rho_1' \mid \rho'\rho_1'^2}}$ $\rho_1' = \dfrac{\rho'\rho_1'^2}{\overline{\rho'^2\rho_1' \mid \rho'\rho_1'^2}}$,

il est évident qu'on peut déterminer ces quatre quantités ρ, ρ', ρ_1, ρ_1' par la recherche de ce facteur commun, par quelques-unes des com-

---

[*] Le signe $\overline{\ \mid\ }$ désigne l'opération de la recherche du facteur complexe commun aux deux quantités, qui se trouvent de part et d'autre de ce signe, satisfaisant en même temps aux sept relations ci-dessus entre ρ, ρ', ρ_1, ρ_1'.

binaisons ci-dessus spécifiées, et satisfaisant en même temps aux sept relations entre ρ, ρ', ρ_1, ρ'_1 et A, B, C.

Au moyen du signe $\overline{\;|\;}$ ou α, en remplaçant ρ, ρ', ρ_1, ρ'_1 dans les expressions des racines :

$$(35)\left\{\begin{aligned}
\left.\begin{matrix}a\\ b\\ c\end{matrix}\right\} &= \frac{-A+\left.\begin{matrix}1\\ \theta'\\ \theta\end{matrix}\right\}\overline{\rho'\,|\,\rho^3}+\left.\begin{matrix}1\\ \theta\\ \theta'\end{matrix}\right\}\overline{\rho\rho'\,|\,\rho'^3}}{3} = -\frac{\left.\begin{matrix}1\\ \theta'\\ \theta\end{matrix}\right\}\overline{\rho_1\rho'_1\,|\,\rho_1^3}-\left.\begin{matrix}1\\ \theta\\ \theta'\end{matrix}\right\}\overline{\rho_1\rho'_1\,|\,\rho'^3_1}}{\left.\begin{matrix}1\\ \theta'\\ \theta\end{matrix}\right\}\overline{\rho\rho'\,|\,\rho^3}-\left.\begin{matrix}1\\ \theta\\ \theta'\end{matrix}\right\}\overline{\rho\rho'\,|\,\rho_1^3}}\\
&= -\frac{2B-\left.\begin{matrix}1\\ \theta'\\ \theta\end{matrix}\right\}\overline{\rho_1\rho'_1\,|\,\rho_1^3}-\left.\begin{matrix}1\\ \theta\\ \theta'\end{matrix}\right\}\overline{\rho_1\rho'_1\,|\,\rho'^3_1}}{2A+\left.\begin{matrix}1\\ \theta'\\ \theta\end{matrix}\right\}\overline{\rho\rho'\,|\,\rho^3}+\left.\begin{matrix}1\\ \theta\\ \theta'\end{matrix}\right\}\overline{\rho\rho'\,|\,\rho'^3}} = -\frac{3C}{B+\left.\begin{matrix}1\\ \theta'\\ \theta\end{matrix}\right\}\overline{\rho_1\rho'_1\,|\,\rho_1^3}+\left.\begin{matrix}1\\ \theta\\ \theta'\end{matrix}\right\}\overline{\rho_1\rho'_1\,|\,\rho'^3_1}},
\end{aligned}\right.$$

et ainsi de suite, en employant les autres combinaisons pour la détermination du facteur commun en question.

En remplaçant $\rho\rho'$, ρ^3, ρ'^3, ... par leurs valeurs, on a enfin

$$(36)\left\{\begin{aligned}
\left.\begin{matrix}a\\ b\\ c\end{matrix}\right\} = \frac{1}{3}\Bigg[-A&+\left.\begin{matrix}1\\ \theta'\\ \theta\end{matrix}\right\}\overline{A^2-3B\,\Big|\,\frac{AB-9C+\sqrt{(AB-9C)^2-4(A^2-3B)(B^2-3AC)}}{2}}\\
&+\left.\begin{matrix}1\\ \theta\\ \theta'\end{matrix}\right\}\overline{A^2-3B\,\Big|\,\frac{AB-9C-\sqrt{(AB-9C)^2-4(A^2-3B)(B^2-3AC)}}{2}}\Bigg]\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

Le procédé de la détermination des facteurs communs désignés par $\overline{\rho\rho'\,|\,\rho_3}$, $\overline{\rho\rho'\,|\,\rho'^3}$, ... étant essentiellement du ressort de l'Arithmétique proprement dite, où il devrait constituer une opération fondamentale, j'ai montré dans les exemples numériques ci-joints qu'il se réduit à un nombre *limité* d'opérations purement algébriques et que, par conséquent, ce procédé résout complétement le problème proposé. Q. E. F.

Corollaire. — Les expressions

$$a = -\frac{\rho_1 - \rho'_1}{\rho - \rho'},$$

$$b = -\frac{\theta'\rho_1 - \theta\rho'_1}{\theta'\rho - \theta\rho'} = -\frac{(\rho_1 - \rho'_1) + (\rho_1 + \rho'_1)\sqrt{-3}}{(\rho - \rho') + (\rho + \rho')\sqrt{-3}},$$

$$c = -\frac{\theta\rho_1 - \theta'\rho'_1}{\theta\rho - \theta'\rho'} = -\frac{(\rho_1 - \rho'_1) - (\rho_1 + \rho'_1)\sqrt{-3}}{(\rho - \rho') - (\rho + \rho')\sqrt{-3}},$$

$$\rho_1 + \rho'_1 = \frac{P(\rho + \rho') - (\rho - \rho')S\sqrt{-3}}{2N},$$

$$\rho_1 - \rho'_1 = \frac{P(\rho - \rho') - (\rho + \rho')S\sqrt{-3}}{2N'},$$

dont les deux dernières résultent de la combinaison de

$$\rho\rho' = N, \quad \rho\rho'_1 = \frac{P + S\sqrt{-3}}{2}, \quad \rho'\rho_1 = \frac{P - S\sqrt{-3}}{2},$$

fournissent, par l'élimination de a, ρ, ρ'_1, $\rho - \rho'$, $\rho_1 + \rho'_1$, $\rho_1 - \rho'_1$ d'une part, et d'autre part de b, $\rho + \rho'$, $\rho - \rho'$, $\rho_1 + \rho'_1$, $\rho_1 - \rho'_1$, les deux équations

$$b = -\frac{2N' + (P + S)c}{2Nc + (P - S)}, \quad a = -\frac{2N' + (P - S)c}{2Nc + (P + S)}$$

ou, rassemblées,

$$\left.\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right\} = -\frac{2N' + (P \pm S)c}{2Nc + (P \mp S)}, \tag{37}$$

au moyen desquelles, une des trois racines a, b, c étant donnée, les deux autres pourraient être trouvées en fonction de la racine donnée et des quantités N, N', P et S déjà calculées pour la détermination de la première racine.

Scolie. — Les considérations suivantes montrent que l'Algèbre même suggère cette solution du cas irréductible :

1° L'élimination de trois des quatre quantités ρ, ρ', ρ_1, ρ'_1 de ρ', ρ_1, ρ'_1

par exemple, entre les quatre équations

$$\frac{A+\rho+\rho'}{3} = -\frac{2B-(\rho_1+\rho'_1)}{2A+\rho+\rho'}, \quad \rho\rho' = N, \quad \rho_1\rho'_1 = N', \quad \rho\rho'_1 + \rho'\rho_1 = P,$$

fournit l'équation finale

$$\begin{aligned}2N\rho^4 - (3P - 2AN - 3S\sqrt{-3})\,\rho^3 \\ - N(3P - 2AN + 3S\sqrt{-3})\,\rho + 2N^3 = 0,\end{aligned}$$

ou

$$\left[2\rho^3 - (3P - 2AN + 3S\sqrt{-3})\right]\left(N\rho - \frac{3P - 2AN - 3S\sqrt{-3}}{2}\right) = 0,$$

en observant qu'on peut écrire au lieu du dernier terme $2N^3$ son équivalent

$$\tfrac{1}{2}(3P - 2AN + 3S\sqrt{-3})(3P - 2AN - 3S\sqrt{-3}),$$

qui peut être satisfaite en posant

$$2\rho^3 - (3P - 2AN + 3S\sqrt{-3}) = 0,$$

ou

$$N\rho - \frac{3P - 2AN - 3S\sqrt{-3}}{2} = 0,$$

d'où

$$\rho^3 = \frac{3P - 2AN + 3S\sqrt{-3}}{2} \quad \text{et} \quad \rho = \frac{3P - 2AN - 3S\sqrt{-3}}{2N}.$$

La valeur de ρ^3 coïncide avec celle qui a déjà été trouvée précédemment.

La valeur de $\rho = \frac{3P - 2AN - 3S\sqrt{-3}}{2N}$, fournie par la seconde de ces deux équations, ne satisfait pas l'équation proposée, tant qu'on prend les opérations qui y sont indiquées dans le sens ordinaire, ce dont on peut se convaincre en observant que la valeur conjuguée de ρ, savoir ρ',

serait dans ce cas $\rho' = \frac{3P - 2AN + 3S\sqrt{-3}}{2N}$, et par conséquent

$$\rho + \rho' = \frac{3P - 2AN}{2N} \quad \text{et} \quad a = + \frac{-A + \rho + \rho'}{3} = \frac{3P - 4AN}{6N} = x,$$

et que $x = \frac{3P - 4AN}{6N}$ ne rend pas les deux membres de l'équation $x^3 + A_x^2 + Bx + C = 0$ identiques. Comment donc interpréter cette valeur pour qu'elle satisfasse l'équation proposée? Car on ne peut admettre qu'elle soit contradictoire avec l'équation proposée, puisqu'elle a été obtenue par une suite de déductions complétement compatibles avec elle. En observant que le numérateur de cette expression est égal à $2\rho'^3$ et le dénominateur à $2\rho\rho'$, on a

$$\rho = \frac{\rho'^3}{\rho\rho'}.$$

Si l'on attachait à la division de ρ'^3 par $\rho\rho'$, qui y est indiquée, un sens plus étendu que celui de la division ordinaire, c'est-à-dire au lieu de la recherche du quotient, la recherche d'une quantité qui divise ces deux quantités sans reste, ce résultat signifierait la valeur conjuguée ρ' de ρ, car on voit sans peine que ρ'^3 et $\rho\rho'$ ont ρ' pour facteur commun. Cette interprétation est d'ailleurs justifiée par le fait que l'opération de la recherche d'un facteur commun à deux quantités ne peut se manifester comme résultante d'autres opérations tant qu'il n'existe aucun signe pour l'indiquer, de même que l'opération de l'extraction d'une racine ne pourrait se manifester comme résultante d'autres opérations si l'on n'avait pas adopté un signe pour l'indiquer. Il est donc à présumer que l'adoption générale d'un pareil signe pourrait conduire à de nouveaux résultats importants. L'Algèbre fournit, outre la valeur cherchée de ρ, sa valeur conjuguée ρ', ce qui est conforme à l'esprit de l'Algèbre et analogue au cas où l'on cherche la racine réelle d'un nombre positif, où l'Algèbre ne fournit pas seulement cette racine, mais en même temps toutes les autres, soit réelles, soit complexes qui existent.

2° Le fait que les valeurs de ρ^3, ρ'^3, ρ_1^3, $\rho_1'^3$, savoir :

$$\frac{3P - 2AN + 3S\sqrt{-3}}{2}, \quad \frac{3P - 2AN - 3S\sqrt{-3}}{2},$$
$$\frac{-3CP + 2BN' + 3CS\sqrt{-3}}{2}, \quad \frac{-3CP + 2BN' - 3CS\sqrt{-3}}{2},$$

ne sont pas des cubes parfaits sous cette forme générale et que les produits

$$\rho^3 \times \rho'^3, \quad \rho_1^3 \times \rho_1'^3, \quad \rho^3 \times \rho_1'^3, \quad \rho'^3 \times \rho_1^3,$$

de même que

$$\rho^6 \times \rho_1^3, \quad \rho'^6 \times \rho_1'^3, \quad \rho^3 \times \rho_1^6, \quad \rho'^3 \times \rho_1'^6,$$

sont des cubes parfaits dont les racines sont respectivement

$$\rho\rho' = N, \quad \rho_1\rho_1' = N', \quad \rho\rho_1' = \frac{P + S\sqrt{-3}}{2}, \quad \rho'\rho_1 = \frac{P - S\sqrt{-3}}{2},$$
$$\rho^2\rho_1 = \frac{3N' - BN + AS\sqrt{-3}}{2}, \quad \rho'^2\rho_1' = \frac{3N' - BN - AS\sqrt{-3}}{2},$$
$$\rho\rho_1^2 = \frac{AN' - 3CN + BS\sqrt{-3}}{2},$$

est une autre suggestion de l'Algèbre qu'il ne faut pas s'obstiner à vouloir déterminer les quantités ρ, ρ', ρ_1, ρ_1' par l'extraction de la racine cubique des valeurs de ρ^3, ρ'^3, ρ_1^3, $\rho_1'^3$; qu'au contraire, quand cette opération devient impossible, il convient, pour obtenir les valeurs de ρ, ρ', ρ_1, ρ_1', d'opérer la décomposition en facteurs des racines cubiques des produits $\rho^3\rho'^3$, $\rho_1^3\rho_1'^3$, $\rho^3\rho_1'^3$, ..., savoir de

$\rho\rho' = N$ dans les facteurs ρ et ρ',

$\rho_1\rho_1' = N'$ » » ρ_1 » ρ_1',

$\rho\rho_1' = \frac{P + S\sqrt{-3}}{2}$ » ρ » ρ_1',

. . . .

APPLICATIONS DE LA SOLUTION PRÉCÉDENTE DU CAS IRRÉDUCTIBLE A DES EXEMPLES NUMÉRIQUES.

I.

$$x^3 - 16x^2 + 73x - 90 = 0.$$

$$A = -16, \quad B = 73, \quad C = -90.$$

$$\rho\rho' = A^2 - 3B = N = 37;$$

$$\rho_1\rho'_1 = N' = 1009;$$

$$\rho\rho'_1 + \rho'\rho_1 = AB - 9C = P = -358;$$

$$\frac{\rho\rho'_1 - \rho'\rho_1}{\sqrt{-3}} = (a-b)(a-c)(b-c) = \sqrt{\frac{4NN' - P^2}{3}} = S = 84;$$

$$\rho^3 + \rho'^3 = 3P - 2AN = 110;$$

$$\rho_1^3 + \rho'^3_1 = 2BN' - 3CP = 50654;$$

$$\rho^2\rho_1 + \rho'^2\rho'_1 = 3N' - BN = 326;$$

$$\rho\rho_1^2 + \rho'\rho'^2_1 = AN' - 3CN = -6154;$$

$$\rho\rho'_1 = \frac{P + S\sqrt{-3}}{2} = -179 + 42\sqrt{-3};$$

$$\rho'\rho_1 = \frac{P + S\sqrt{-3}}{2} = -179 - 42\sqrt{-3};$$

$$\rho^3 = 55 + 126\sqrt{-3};$$

$$\rho'^3 = 55 - 126\sqrt{-3};$$

$$\rho_1^3 = 25327 - 11340\sqrt{-3};$$

$$\rho'^3_1 = 25327 + 11340\sqrt{-3};$$

$$\rho^2\rho_1 = \frac{3N' - BN + AS\sqrt{-3}}{2} = 163 - 672\sqrt{-3};$$

$$\rho'^2\rho'_1 = \frac{3N' - BN - AS\sqrt{-3}}{2} = 163 + 672\sqrt{-3};$$

$$\rho\rho_1^2 = -3077 + 3066\sqrt{-3};$$

$$\rho'\rho'^2_1 = -3077 + 3066\sqrt{-3}.$$

De ce que S est réel et rationnel, on conclut que les trois racines a, b, c sont de même espèce et que, par conséquent, le cas irréductible se présente ici. $\rho, \rho', \rho_1, \rho'_1$ ne peuvent donc être déterminés autre-

ment que par la décomposition des produits $\rho\rho'$, $\rho_1\rho'_1$, $\rho\rho'_1$, ... dans leurs facteurs, ce que l'on peut effectuer de tant de manières, qu'il serait très-long d'épuiser toutes les combinaisons possibles; en voici quelques-unes :

1° *Détermination de* ρ *par l'opération désignée par* $\overline{\rho\rho' | \rho\rho'_1}$.

A cet effet on divise : $\rho\rho'_1 = -179 + 42\sqrt{-3}$ par $\rho\rho' = 37$, ce qui donne $-5+\sqrt{-3}$ pour quotient et $6+5\sqrt{-3} = \sqrt{-3}(5-2\sqrt{-3})$ pour reste.

En supprimant dans ce reste le facteur monôme $\sqrt{-3}$, qui n'est pas commun à 37 et à $-179+42\sqrt{-3}$ et en divisant le diviseur précédent par ce reste après la suppression du facteur $\sqrt{-3}$, on trouve pour quotient exact, c'est-à-dire sans reste : $5+2\sqrt{-3}$, par conséquent $\overline{-179+42\sqrt{-3} | 37} = 5-2\sqrt{-3}$; donc :

$$37 = (5+2\sqrt{-3})(5-2\sqrt{-3}) = (-5+2\sqrt{-3})(-5-2\sqrt{-3}).$$

et

$$\begin{aligned} -179+42\sqrt{-3} &= (5-2\sqrt{-3})(-31-4\sqrt{-3}) \\ &= (-5+2\sqrt{-3})(+31+4\sqrt{-3}). \end{aligned}$$

Pour faire disparaître l'indétermination des signes, on n'a qu'à comparer les cubes de $5-2\sqrt{-3}$ et de $-5+2\sqrt{-3}$, $5+2\sqrt{-3}$, $-5-2\sqrt{-3}$ avec les valeurs de ρ^3 et de ρ'^3, savoir :

$$\rho^3 = 55+126\sqrt{-3} \quad \text{et} \quad \rho'^3 = 55-126\sqrt{-3}.$$

Cette vérification donne

$$\begin{aligned} \rho &= -5+2\sqrt{-3}, & \rho' &= -5-2\sqrt{-3}, \\ \rho_1 &= 31-4\sqrt{-3}, & \rho'_1 &= 31+4\sqrt{-3}. \end{aligned}$$

2° *Détermination de ρ'_1 par l'opération indiquée par $\overline{\rho\rho'_1 \mid \rho_1\rho'_1}$* [*].

Première opération.

$$\frac{\rho_1\rho'_1}{\rho\rho'_1} = \frac{1009}{-179+42\sqrt{-3}} = -\frac{179}{37} - \frac{42}{37}\sqrt{-3},$$

ou approximativement en nombres entiers $-5-\sqrt{-3}$. Ce quotient approximatif conduit au reste

$$-12+31\sqrt{-3} = \sqrt{-3}(31+4\sqrt{-3}).$$

Deuxième opération.

$$\frac{-179+42\sqrt{-3}}{31+4\sqrt{-3}} = -5+2\sqrt{-3}$$

$$\therefore \overline{1009 \mid -179+42\sqrt{-3}} = 31+4\sqrt{-3}.$$

Après une vérification semblable à celle du cas précédent, on trouve donc $\rho'_1 = 31+4\sqrt{-3}$, et par suite, puisque ρ est la conjuguée de ρ'_1, $\rho_1 = 31-4\sqrt{-3}$.

---

[*] $$\frac{m+n\sqrt{-3}}{p+q\sqrt{-3}} = \frac{(m+n\sqrt{-3})(p-q\sqrt{-3})}{(p+q\sqrt{-3})(p-q\sqrt{-3})}$$
$$= \frac{(mp+3qn)+(np-mq)\sqrt{-3}}{p^2+3q^2} = \frac{mp+3nq}{p^2+3q^2} + \frac{np-mq}{p^2+3q^2}\sqrt{-3}$$

montre que le quotient de la division d'une quantité complexe par une autre quantité complexe est en général une quantité de même espèce; en désignant la partie réelle de ce quotient par α et le facteur réel de la partie imaginaire par β, de sorte que $\frac{m+n\sqrt{-3}}{p+q\sqrt{-3}} = \alpha+\beta\sqrt{-3}$, on a

$$\alpha = \frac{mp+3nq}{p^2+3q^2}, \quad \beta = \frac{np-mq}{p^2+3q^2};$$

c'est au moyen de ces formules qu'on a calculé, dans ces exemples, les termes des quotients de pareilles divisions.

3° *Détermination de ρ_1 par l'équation indiquée par* $\overline{\rho_1\rho'_1 \mid \rho^2\rho_1}$.

Première opération.

$$\frac{\rho_1\rho'_1}{\rho^2\rho_1} = \frac{1009}{163 - 672\sqrt{-3}} = \frac{163}{1369} + \frac{672}{1369}\sqrt{-3},$$

ou approximativement, en nombres entiers, $\sqrt{-3}$; ce quotient approximatif donne le reste $-1007 - 163\sqrt{-3}$.

Deuxième opération.

$$\frac{163 - 672\sqrt{-3}}{-1007 - 163\sqrt{-3}} = \frac{163}{1084} + \frac{697}{1084}\sqrt{-3},$$

ou approximativement, en nombres entiers, $\sqrt{-3}$, ce qui conduit au nouveau reste $-326 + 335\sqrt{-3}$.

Troisième opération.

$$\frac{-1007 - 163\sqrt{-3}}{-326 + 335\sqrt{-3}} = \frac{163}{439} + \frac{397}{439}\sqrt{-3},$$

ou approximativement, en nombres entiers, $1 + \sqrt{-3}$, ce qui donne le reste $324 - 172\sqrt{-3} = -4\sqrt{-3}(43 + 27\sqrt{-3})$.

Quatrième opération.

$$\frac{-326 + 335\sqrt{-3}}{43 + 27\sqrt{-3}} = \frac{13}{4} + \frac{23}{4}\sqrt{-3},$$

ou approximativement, en nombres entiers, $3 + 6\sqrt{-3}$, ce qui donne le reste $31 - 4\sqrt{-3}$.

Cinquième opération.

$$\frac{43 + 27\sqrt{-3}}{31 - 4\sqrt{-3}} = 1 + \sqrt{-3};$$

par conséquent,

$$\sqrt[1009]{163 - 672\sqrt{-3}} = 31 - 4\sqrt{-3};$$

partant,

$$\begin{aligned}1009 &= (31 - 4\sqrt{-3})(31 + 4\sqrt{-3}) \\ &= (-31 + 4\sqrt{-3})(-31 - 4\sqrt{-3}),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}163 - 672\sqrt{-3} &= (31 - 4\sqrt{-3})(13 - 20\sqrt{-3}) \\ &= (-31 + 4\sqrt{-3})(-13 + 20\sqrt{-3}) \\ &= (31 - 4\sqrt{-3})(-5 + 2\sqrt{-3})^2 \\ &= -(-31 + 4\sqrt{-3})(+5 - 2\sqrt{-3})^2.\end{aligned}$$

Une vérification analogue à celle du n° 1 prouve donc que

$$\rho' = 31 - 4\sqrt{-4},$$

d'où la valeur conjuguée

$$\rho'_1 = 31 + 4\sqrt{-3}$$

de ρ_1; partant,

$$\rho = -5 + 2\sqrt{-3}, \quad \rho' = -5 - 2\sqrt{-3}$$

et

$$\rho + \rho' = -10, \qquad \rho_1 + \rho'_1 = 62,$$
$$\rho - \rho' = 4\sqrt{-3}, \quad \rho_1 - \rho'_1 = -8\sqrt{-3},$$

d'ou, en substituant ces valeurs dans les expressions des racines a, b, c,

$$a = 2, \quad b = 9, \quad c = 5.$$

II.

$$x^3 + \frac{41}{140}x^2 - \frac{79}{14}x + \frac{429}{140} = 0,$$

$$A = \frac{41}{140}, \quad B = -\frac{79}{14}, \quad C = \frac{429}{140},$$

$$\rho\rho' = A^2 - 3B = N = \frac{333481}{19600}, \quad \rho_1\rho'_1 = B^2 - 3AC = N' = \frac{571333}{19600},$$

$$\rho\rho'_1 + \rho'\rho_1 = AB - 9C = P = -\frac{572930}{19600},$$

$$\frac{\rho\rho'_1 - \rho'\rho_1}{\sqrt{-3}} = \sqrt{\frac{4NN' - P^2}{3}} = S = \frac{380292}{19600},$$

$$\rho\rho'_1 = \frac{P + S\sqrt{-3}}{2} = \frac{-286465 + 190146\sqrt{-3}}{19600},$$

$$\rho\rho_1 = \frac{P - S\sqrt{-3}}{2} = \frac{-286465 - 190146\sqrt{-3}}{19600},$$

$$\rho^3 = \frac{3P - 2AN + 3S\sqrt{-3}}{2} = \frac{-13398021 + 79861320\sqrt{-3}}{2744000},$$

$$\rho'^3 = \frac{3P - 2AN - 3S\sqrt{-3}}{2} = \frac{-13398021 - 79861320\sqrt{-3}}{2744000},$$

$$\rho_1^3 = \frac{-82672615 + 244717902\sqrt{-3}}{2744000}, \quad \rho'^3_1 = \frac{-82672615 - 244717902\sqrt{-3}}{2744000}.$$

De ce que S est réel, rationnel et fractionnaire, on conclut que les racines a, b, c sont de même réelles, rationnelles et fractionnaires. Donc le cas irréductible se présente encore ici.

$\rho_1, \rho', \rho_1, \rho'_1$ sont ici des quantités complexes et fractionnaires. D'après la composition de $\rho, \rho', \rho_1, \rho'_1$ en fonction de a, b, c et le fait que ρ et ρ', de même que ρ_1 et ρ'_1, sont conjugués, il est évident que ρ et ρ' ont des dénominateurs égaux, de même ρ_1 et ρ'_1, et que, par suite, le dénominateur de $N = \rho\rho'$ est égal au carré du dénominateur commun de ρ et ρ', le dénominateur de $N' = \rho_1\rho'_1$ égal au carré du dénominateur commun de ρ_1 et ρ'_1, celui de $\rho\rho'_1$ et $\rho'\rho_1$ égal au produit de ceux de ρ et ρ_1, celui de ρ^3 et ρ'^3 au cube du dénominateur commun de ρ et ρ', celui de ρ_1^3 et ρ'^3_1 au cube des dénominateurs communs de ρ_1 et ρ'_1, celui de $\rho^2\rho_1$ et $\rho'^2\rho'_1$ au produit du carré du dénominateur commun de

ρ et ρ' par le dénominateur commun de ρ_1 et ρ'_1, et enfin celui de $\rho\rho_1^2$ et $\rho'\rho'^2_1$ égal au produit du dénominateur commun de ρ et ρ' par le carré du dénominateur commun de ρ_1, ρ'_1. Réciproquement, les dénominateurs communs de ρ et ρ' et de ρ_1 et ρ'_1 seront donc respectivement égaux aux racines carrées des dénominateurs de N et de N', ou aux racines cubiques des dénominateurs communs de

$$\rho^3 = \frac{3P - 2AN + 3S\sqrt{-3}}{2} \quad \text{et} \quad \rho'^3 = \frac{3P - 2AN - 3S\sqrt{-3}}{2},$$

et de

$$\rho_1^3 = \frac{-3CP + 2BN' + 3CS\sqrt{-3}}{2} \quad \text{et} \quad \rho'^3_1 = \frac{-3CP + 2BN' - 3CS\sqrt{-3}}{2}.$$

Ces dénominateurs étant ainsi déterminés, on peut en faire abstraction dans la recherche du facteur commun, ce qui réduit la détermination de ρ, ρ', ρ_1, ρ'_1, dans le cas où les racines a, b, c sont réelles, rationnelles et fractionnaires, à celui où elles sont réelles, rationnelles et entières. Dans le cas actuel, le dénominateur commun de ρ et ρ' est égal à $\sqrt{19600} = 140$, et celui de ρ_1 et ρ'_1 de même égal à $\sqrt{19600} = 140$.

Détermination du numérateur de ρ par la recherche du facteur complexe commun aux numérateurs des valeurs de $\rho\rho'$ et $\rho\rho'_1$, savoir par l'exécution de l'opération indiquée par

$$\overline{333481 \,|\, 286465 + 190146\sqrt{-3}}.$$

Première opération.

$$\frac{-286465 + 190146\sqrt{-3}}{333481} = -\frac{286465}{333481} + \frac{190146}{333481}\sqrt{-3},$$

ou approximativement, en nombres entiers, $-1 + \sqrt{-3}$, ce qui donne le reste $47076 - 140335\sqrt{-3} = -\sqrt{-3}(140335 + 15692\sqrt{-3})$, où l'on peut supprimer le facteur $-\sqrt{-3}$.

Deuxième opération.

$$\frac{333481}{143335 + 15672\sqrt{-3}} = \frac{143335}{63817} - \frac{15672}{63817}\sqrt{-3},$$

ou approximativement en nombres entiers 2, ce qui donne le reste $46811 - 31344\sqrt{-3}$.

Troisième opération.

$$\frac{146335 + 15672\sqrt{-3}}{46811 - 31344\sqrt{-3}} = \frac{15701}{15409} + \frac{15672}{15409}\sqrt{-3},$$

ou approximativement, en nombres entiers, $1 + \sqrt{-3}$, ce qui donne le reste $2492 + 205\sqrt{-3}$.

Quatrième opération.

$$\frac{46811 - 31344\sqrt{-3}}{2492 + 205\sqrt{-3}} = \frac{292}{19} - \frac{263}{19}\sqrt{-3},$$

ou approximativement, en nombres entiers, $15 - 14\sqrt{-3}$, ce qui donne le reste $821 + 469\sqrt{-3}$.

Cinquième opération.

$$\frac{2492 + 205\sqrt{-3}}{821 + 469\sqrt{-3}} = \frac{7}{4} - \frac{3}{4}\sqrt{-3},$$

ou approximativement, en nombres entiers, $2 - \sqrt{-3}$, ce qui donne le reste $557 + 557\sqrt{-3} = 557(1 + \sqrt{-3})$, où l'on peut supprimer le facteur 557.

Sixième opération.

$$\frac{821 + 469\sqrt{-3}}{1 + \sqrt{-3}} = 557 - 88\sqrt{-3},$$

par conséquent

$$\overline{333481 \mid -286465 + 190146} = 557 - 88\sqrt{-3}.$$

En élevant $557 - 88\sqrt{-3}$ et $-557 + 88\sqrt{-3}$ au cube et en comparant ces cubes au numérateur de la valeur de ρ^3, c'est-à-dire à celui de $\rho^3 = \frac{-133988021 + 79861320\sqrt{-3}}{2744000}$, on conclut que

$$\rho = \frac{-557 + 88\sqrt{-3}}{140};$$

partant, ρ' la valeur conjuguée de ρ,

$$\rho' = \frac{-557 - 88\sqrt{-3}}{140},$$

et la division de $\rho\rho'_1 = \dfrac{-286465 + 190146\sqrt{-3}}{1960}$ par

$$\rho = \frac{-557 + 88\sqrt{-3}}{140}$$

fournit la valeur de $\rho'_1 = \dfrac{629 - 242\sqrt{-3}}{140}$, partant, la valeur conjuguée de ρ'_1, savoir

$$\rho_1 = \frac{629 + 242\sqrt{-3}}{140},$$

par suite

$$\rho + \rho' = -\frac{557}{70}, \quad \rho - \rho' = -\frac{88}{70}\sqrt{-3} = -\frac{44}{35}\sqrt{-3},$$

et

$$\rho_1 + \rho'_1 = \frac{629}{90}, \quad \rho_1 - \rho'_1 = \frac{242}{70}\sqrt{-3} = \frac{121}{35}\sqrt{-3}.$$

Substituant ces valeurs dans les expressions des racines a, b, c, on trouve

$$a = -\frac{11}{4}, \quad b = \frac{13}{7}, \quad c = \frac{3}{5}.$$

Remarque. — Le cas où ρ et ρ', de même que ρ_1 et ρ'_1, auraient respectivement les facteurs d et d' communs (qui ne sauraient être complexes, puisque ρ et ρ', de même que ρ_1 et ρ'_1 sont des quantités complexes *conjuguées*), peut être traité d'une manière analogue à celui où ils ont des diviseurs communs réels, c'est-à-dire en supprimant d'abord dans $\rho\rho' = \mathrm{N}$, $\rho_1\rho'_1 = \mathrm{N}$, $\rho\rho'_1 = \dfrac{\mathrm{P} + \mathrm{S}\sqrt{-3}}{2}$, $\rho'\rho_1 = \dfrac{\mathrm{P} - \mathrm{S}\sqrt{-3}}{2}$, respectivement d^2, d'^2, dd', ..., et en appliquant ensuite la méthode exposée ci-dessus à la recherche de $\frac{\rho}{d}$, $\frac{\rho'}{d}$ et $\frac{\rho_1}{d'}$, $\frac{\rho'_1}{d'}$, que l'on multiplierait ensuite par d et d' respectivement pour avoir les valeurs de ρ, ρ', ρ_1, ρ'_1.

III.

$$x^3+\frac{81}{55}x^2+\frac{181}{385}x+\frac{3}{77}=0,$$

$$A=\frac{81}{55},\quad B=\frac{181}{385},\quad C=\frac{3}{77},$$

$$N=\frac{16062}{21175}=\frac{112434}{148225},\quad N'=\frac{7246}{148225},\quad P=\frac{50652}{148225},\quad S=\frac{932\sqrt{266}}{148225},$$

$$\rho\rho'_1=\frac{25326+466\sqrt{266}\sqrt{-3}}{148225},\quad \rho'\rho_1=\frac{25326-466\sqrt{266}\sqrt{-3}}{148225},$$

$$\rho^3=\frac{-34498548+538230\sqrt{266}\sqrt{-3}}{57066625},$$

$$\rho'^3=\frac{-34498548-538230\sqrt{266}\sqrt{-3}}{57066625},$$

$$\rho_1^3=\frac{171856+20970\sqrt{266}\sqrt{-3}}{57066625},\quad \rho_1'^3=\frac{171856-20970\sqrt{266}\sqrt{-3}}{57066625}.$$

De ce que S est réel, mais irrationnel et fractionnaire, on conclut que les racines a, b, c sont réelles, mais ou toutes les trois irrationnelles ou l'une d'elles rationnelle et fractionnaire et les deux autres irrationnelles. Comme ce dernier cas n'entre pas dans le cas irréductible, il convient d'examiner si le premier cas a lieu ici. La composition de $N=\rho\rho'$, $N'=\rho\rho'_1$, $\rho\rho'_1=\frac{P+S\sqrt{-3}}{2}$, en fonction de a, b, c, montre que dans ce cas N et N' sont susceptibles d'être ramenés à la forme $\frac{\alpha^2+3\lambda\beta^2}{\gamma^2}=\frac{\alpha+\beta\sqrt{\lambda}\sqrt{-3}}{\gamma}+\frac{\alpha-\beta\sqrt{\lambda}\sqrt{-3}}{\gamma}$ (λ étant le nombre positif qui se trouve sous le radical du facteur irrationnel de S et α, β et γ des nombres entiers), et, en effet, on trouve aisément que dans le cas actuel

$$\begin{aligned}N=\rho\rho' &=\frac{\overline{126}^2+3.266.\overline{11}^2}{\overline{385}^2}=\frac{126+11\sqrt{266}\sqrt{-3}}{385}\times\frac{126-11\sqrt{266}\sqrt{-3}}{385}\\ &=\frac{-126-11\sqrt{266}\sqrt{-3}}{385}\times\frac{-126+11\sqrt{266}\sqrt{-3}}{385},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}N'=\rho_1\rho'_1 &=\frac{8^2+3.266.3^2}{\overline{385}^2}=\frac{8+3\sqrt{266}.\sqrt{-3}}{385}\times\frac{8-3\sqrt{266}.\sqrt{-3}}{385}\\ &=\frac{-8-3\sqrt{266}\sqrt{-3}}{385}\times\frac{-8+3\sqrt{266}.\sqrt{-3}}{385}.\end{aligned}$$

Comme les cubes de $\frac{126 - 11\sqrt{266}.\sqrt{-3}}{385}$, $\frac{126 + 11\sqrt{266}.\sqrt{-3}}{385}$ ainsi que de $\frac{-8 - 3\sqrt{266}.\sqrt{-3}}{385}$, $\frac{-8 + 3\sqrt{266}.\sqrt{-3}}{385}$ sont respectivement égaux aux valeurs ci-dessus de ρ^3, ρ'^3, ρ_1^3, $\rho_1'^3$, on a évidemment

$$\rho = \frac{126 - 11\sqrt{266}.\sqrt{-3}}{385}, \quad \rho' = \frac{126 + 11\sqrt{266}.\sqrt{-3}}{385},$$
$$\rho_1 = \frac{-8 - 3\sqrt{266}.\sqrt{-3}}{385}, \quad \rho_1' = \frac{-8 + 3\sqrt{266}.\sqrt{-3}}{385},$$

et, par conséquent,

$$\rho + \rho' = \frac{4.63}{385} = \frac{9.4}{55}, \quad \rho - \rho' = -\frac{2.11\sqrt{266}\sqrt{-3}}{385},$$
$$\rho_1 + \rho_1' = -\frac{16}{385}, \quad \rho_1 - \rho_1' = -\frac{6\sqrt{266}.\sqrt{-3}}{385}.$$

En substituant ces valeurs de $\rho + \rho'$, $\rho - \rho'$, $\rho_1 + \rho_1'$, $\rho_1 - \rho_1'$ dans les expressions des racines a, b, c, on obtient pour valeurs de celles-ci

$$a = -\frac{3}{11}, \quad b = -\frac{3\sqrt{7} + \sqrt{38}}{5\sqrt{7}}, \quad c = -\frac{3\sqrt{7} - \sqrt{38}}{5\sqrt{7}}.$$

IV.

$$x^3 - (8 + \sqrt{5})x^2 + (19 + 6\sqrt{5})x - 7(2 + \sqrt{5}) = 0,$$
$$A = -(8 + \sqrt{5}), \quad B = 19 + 6\sqrt{5}, \quad C = -7(2 + \sqrt{5}),$$
$$N = \rho\rho' = 2(6 - \sqrt{5}), \quad N' = \rho_1\rho_1' = 2(50 + 9\sqrt{5}),$$
$$P = \rho\rho_1' + \rho'\rho_1 = -4(14 + \sqrt{5}),$$
$$S = \sqrt{\frac{4NN' - P^2}{3}} = 4\sqrt{2}(\sqrt{5} - 2),$$
$$\rho\rho_1' = \frac{P + S\sqrt{-3}}{2} = -28 - 2\sqrt{5} + 2\sqrt{2}(\sqrt{5} - 2)\sqrt{-3}.$$

S, étant réel, mais irrationnel, montre que les racines de cette équation sont toutes les trois réelles et irrationnelles. On pourrait les déterminer approximativement par la formule de Cardan [*voir* la note (2°), p. 293] en développant les deux racines cubiques en séries convergentes, car dans la somme de ces deux séries les termes imaginaires

s'entre-détruisent; mais on obtient ces racines beaucoup plus promptement et sous forme finie, mais implicite, c'est-à-dire sous une forme où il reste à exécuter l'opération qui rend ces racines irrationnelles, qui y est seulement indiquée, d'après la méthode précédente, en observant qu'on peut réduire la quantité $N = \rho\rho'$ à la forme

$$\alpha^2 + 3\beta^2 = (\alpha + \beta\sqrt{-3})(\alpha - \beta\sqrt{-3}).$$

En effet,

$$\begin{aligned} N = 12 - 2\sqrt{5} &= (1-\sqrt{5})^2 + 6 = (1-\sqrt{5})^2 + 3(\sqrt{2})^2 \\ &= (1 - \sqrt{5} + \sqrt{2}\sqrt{-3})(1 - \sqrt{5} - \sqrt{2}\sqrt{-3}) \\ &= [-(1-\sqrt{5}) - \sqrt{2}\sqrt{-3}][-(1-\sqrt{5}) + \sqrt{2}\sqrt{-3}]; \end{aligned}$$

par la vérification connue on fait disparaître l'indétermination des signes, et l'on trouve

$$\rho = -(1-\sqrt{5}) - \sqrt{2}\sqrt{-3}, \quad \rho' = -(1-\sqrt{5}) + \sqrt{2}\sqrt{-3},$$

et, par la division de $\rho\rho'_1 = -28 - 2\sqrt{5} + 2\sqrt{2}(\sqrt{5}-2)\sqrt{-3}$ par $\rho = -(1-\sqrt{5}) - \sqrt{2}\sqrt{-3}$,

$$\rho_1 = 1 - 3\sqrt{5} + \sqrt{2}(2+\sqrt{5})\sqrt{-3}, \quad \rho'_1 = 1 - 3\sqrt{5} - \sqrt{2}(2+\sqrt{5})\sqrt{-3};$$

par conséquent,

$$\begin{aligned} \rho + \rho' &= -2(1-\sqrt{5}), \quad \rho - \rho' = -2\sqrt{2}\sqrt{-3}, \\ \rho_1 + \rho'_1 &= 2(1-3\sqrt{5}), \quad \rho_1 - \rho'_1 = 2\sqrt{2}(2+\sqrt{5})\sqrt{-3}, \\ \rho\,\theta + \rho'\,\theta' &= 1 + 3\sqrt{2} - \sqrt{5}, \\ \rho\,\theta - \rho'\,\theta' &= -(1 - \sqrt{5} - \sqrt{2})\sqrt{-3}, \\ \rho_1\theta + \rho'_1\theta' &= -1 + 3\sqrt{5} - 6\sqrt{2} - 3\sqrt{2}\sqrt{5}, \\ \rho_1\theta - \rho'_1\theta' &= (1 - 3\sqrt{5} - 2\sqrt{2} - \sqrt{2}\sqrt{5})\sqrt{-3}, \\ \rho\,\theta' + \rho'\,\theta &= 1 - 3\sqrt{2} - \sqrt{5}, \\ \rho\,\theta' - \rho'\,\theta &= (1 - \sqrt{5} + \sqrt{2})\sqrt{-3}, \\ \rho_1\theta' + \rho'_1\theta &= -1 + 3\sqrt{5} + 6\sqrt{2} + 3\sqrt{2}\sqrt{5}, \\ \rho_1\theta' - \rho'_1\theta &= -(1 - 3\sqrt{5} + 2\sqrt{2} + \sqrt{2}\sqrt{5})\sqrt{-3}: \end{aligned}$$

partant

$$a = 2 + \sqrt{5}, \quad b = 3 + \sqrt{2}, \quad c = 3 - \sqrt{2}.$$

Appendice.

Le Tableau suivant des valeurs de $\alpha^2 + 3\beta^2$ correspondant à toutes les valeurs entières de α et β entre 0 et 9 pourra être utile dans la détermination de ρ, ρ', ρ_1, ρ'_1 par la décomposition de $N = \rho\rho'$, $N' = \rho_2\rho'_1$ dans leurs facteurs ρ, ρ' et ρ_1, ρ'_1, quand N et N′ sont des nombres calculables.

	$\alpha=0$.	$\alpha=1$.	$\alpha=2$.	$\alpha=3$.	$\alpha=4$.	$\alpha=5$.	$\alpha=6$.	$\alpha=7$.	$\alpha=8$.	$\alpha=9$.
$\beta=0$	$0^2+3.0^2=0$	$1^2+3.0^2=1$	$2^2+3.0^2=4$	$3^2+3.0^2=9$	$4^2+3.0^2=16$	$5^2+3.0^2=25$	$6^2+3.0^2=36$	$7^2+3.0^2=49$	$8^2+3.0^2=64$	$9^2+3.0^2=81$
$\beta=1$	$0^2+3.1^2=3$	$1^2+3.1^2=4$	$2^2+3.1^2=7$	$3^2+3.1^2=12$	$4^2+3.1^2=19$	$5^2+3.1^2=28$	$6^2+3.1^2=39$	$7^2+3.1^2=52$	$8^2+3.1^2=67$	$9^2+3.1^2=84$
$\beta=2$	$0^2+3.2^2=12$	$1^2+3.2^2=13$	$2^2+3.2^2=16$	$3^2+3.2^2=21$	$4^2+3.2^2=28$	$5^2+3.2^2=37$	$6^2+3.2^2=48$	$7^2+3.2^2=61$	$8^2+3.2^2=76$	$9^2+3.2^2=93$
$\beta=3$	$0^2+3.3^2=27$	$1^2+3.3^2=28$	$2^2+3.3^2=31$	$3^2+3.3^2=36$	$4^2+3.3^2=43$	$5^2+3.3^2=52$	$6^2+3.3^2=63$	$7^2+3.3^2=76$	$8^2+3.3^2=91$	$9^2+3.3^2=108$
$\beta=4$	$0^2+3.4^2=48$	$1^2+3.4^2=49$	$2^2+3.4^2=52$	$3^2+3.4^2=57$	$4^2+3.4^2=64$	$5^2+3.4^2=73$	$6^2+3.4^2=84$	$7^2+3.4^2=97$	$8^2+3.4^2=112$	$9^2+3.4^2=129$
$\beta=5$	$0^2+3.5^2=75$	$1^2+3.5^2=76$	$2^2+3.5^2=79$	$3^2+3.5^2=84$	$4^2+3.5^2=91$	$5^2+3.5^2=100$	$6^2+3.5^2=111$	$7^2+3.5^2=124$	$8^2+3.5^2=139$	$9^2+3.5^2=156$
$\beta=6$	$0^2+3.6^2=108$	$1^2+3.6^2=109$	$2^2+3.6^2=112$	$3^2+3.6^2=117$	$4^2+3.6^2=124$	$5^2+3.6^2=133$	$6^2+3.6^2=144$	$7^2+3.6^2=157$	$8^2+3.6^2=172$	$9^2+3.6^2=189$
$\beta=7$	$0^2+3.7^2=147$	$1^2+3.7^2=148$	$2^2+3.7^2=151$	$3^2+3.7^2=156$	$4^2+3.7^2=163$	$5^2+3.7^2=172$	$6^2+3.7^2=183$	$7^2+3.7^2=196$	$8^2+3.7^2=211$	$9^2+3.7^2=228$
$\beta=8$	$0^2+3.8^2=192$	$1^2+3.8^2=193$	$2^2+3.8^2=196$	$3^2+3.8^2=201$	$4^2+3.8^2=208$	$5^2+3.8^2=217$	$6^2+3.8^2=228$	$7^2+3.8^2=241$	$8^2+3.8^2=256$	$9^2+3.8^2=273$
$\beta=9$	$0^2+3.9^2=243$	$1^2+3.9^2=244$	$2^2+3.9^2=247$	$3^2+3.9^2=252$	$4^2+3.9^2=259$	$5^2+3.9^2=268$	$6^2+3.9^2=279$	$7^2+3.9^2=292$	$8^2+3.9^2=307$	$9^2+3.9^2=324$

Note sur les conditions de résistance d'un tube elliptique, dont l'épaisseur est faible, soumis à l'action d'une pression uniforme intérieure;

PAR M. H. RESAL.

Le profil de la section droite du tube est déterminé par deux courbes parallèles à une ellipse dont elles sont équidistantes. L'équidistance ou la demi-épaisseur est censée assez faible pour que l'on puisse supposer que la pression est répartie sur la surface du cylindre elliptique moyen.

Nous ne considérerons d'ailleurs que des éléments de la pièce suffisamment éloignés de ses extrémités pour que le mode d'agencement des fonds n'ait aucune influence appréciable sur leurs déplacements transversaux, ce qui revient théoriquement à considérer ces éléments comme appartenant à une chaudière dont la longueur serait infinie.

Concevons que l'on détache de la pièce un tronçon d'une longueur égale à l'unité et limité par deux sections droites; la considération de ce tronçon se ramène évidemment à celle de l'une de ces sections, en supposant que la pression normale soit uniformément répartie sur l'ellipse moyenne.

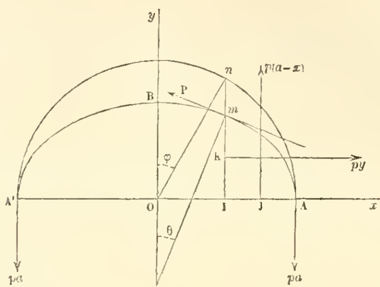
Soient (*fig.* 1)

O le centre de l'ellipse;

ABA' l'une des demi-ellipses, A et A' étant les sommets du grand axe et B celui du demi-petit axe;

OAx, OBy les parties positives des axes des x et des y;

$2a$, $2b$, c le grand axe, le petit axe et l'excentricité relative de la courbe;



$x = \text{OI}$, $y = \text{I}m$ les coordonnées d'un point m du quart d'ellipse AB considéré en particulier;

θ et φ les angles formés avec Oy par la normale en m et par le rayon On mené à l'intersection du cercle circonscrit avec la direction de Im;

s l'arc Bm de l'ellipse;

p la pression par unité de longueur d'arc;

$2e$ l'épaisseur.

En se rappelant que l'on a $m\text{I} = \frac{b}{a} n\text{I} = n\text{I}\sqrt{1 - c^2}$, la figure donne

$$(a) \qquad \begin{cases} x = a \sin\varphi, \\ y = a\sqrt{1 - c^2}\cos\varphi. \end{cases}$$

On déduit de là

$$(b) \qquad \begin{cases} y^2 + x^2 = a^2(1 - c^2 + c^2 \sin^2\varphi), \\ dx = a\cos\varphi\, d\varphi, \\ dy = -a\sqrt{1 - c^2}\sin\varphi\, d\varphi, \\ ds = a\sqrt{1 - c^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi, \\ \cos\theta = \dfrac{dx}{ds} = \dfrac{\cos\varphi}{\sqrt{1 - c^2\sin^2\varphi}}, \\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{1 - c^2}\sin\varphi}{\sqrt{1 - c^2\sin^2\varphi}}. \end{cases}$$

Les tractions égales exercées en A et en A′, par l'autre demi-moitié de l'ellipse, ont pour valeur pa, puisqu'elles doivent faire équilibre à la résultante $2pa$ des pressions élémentaires qui agissent sur A′BA. La pression totale sur Am a pour composantes

$$p.\mathrm{AI} = p(a-x), \quad p.m\mathrm{I} = py,$$

respectivement parallèles à Oy et à Ox; la direction de la première passe par le milieu J de AI, et celle de la seconde par le milieu K de Im.

Résultante des forces élastiques normales à une section. — Si nous projetons sur la tangente mP en m les forces qui sollicitent l'arc Am, on trouve, pour cette résultante,

$$\mathrm{P} = pa\sin\theta - p(a-x)\sin\theta + py\cos\theta = p(x\sin\theta + y\cos\theta),$$

ou, en remplaçant x, y, $\sin\theta$, $\cos\theta$ par leurs valeurs en fonction de φ que donnent les formules (a) et (b),

$$(1) \qquad \mathrm{P} = pa\frac{\sqrt{1-c^2}}{\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}}.$$

Moment fléchissant. — Le moment du couple élastique développé dans la section A est une constante dont la valeur ne peut résulter que de la solution du problème. En prenant les moments par rapport à m des forces pa, $p(a-x)$, py, la première étant la seule qui tende à augmenter la courbure, et ajoutant à la somme obtenue une constante pour représenter le moment du couple élastique en A, on a, pour le moment fléchissant,

$$\mathfrak{M} = p\left[a(a-x) - \frac{y^2}{2} - \frac{(a-x)^2}{2} + \text{const.}\right] = -\frac{p}{2}(y^2 + x^2 + \text{const.}),$$

ou, en ayant égard à la première des formules (b) et désignant par C une constante arbitraire,

$$(2) \qquad \mathfrak{M} = \frac{pa^2c^2}{2}(\mathrm{C} - \sin^2\varphi).$$

Équation de condition. — En se reportant à la formule (1) du n° 44, on voit que, pour exprimer que l'angle yOx reste droit après la déformation, il faut poser

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathfrak{M} \frac{ds}{d\varphi} d\varphi = 0,$$

ou, en vertu de la quatrième des formules (b) et eu égard à la valeur ci-dessus de $\mathfrak{M}$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2\varphi}\, d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi \sqrt{1 - c^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi = 0,$$

d'où

$$(3) \qquad C = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi \sqrt{1 - c^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - c^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi}.$$

Chacun des éléments de l'intégrale du numérateur étant plus petit que l'élément correspondant de l'intégrale du dénominateur, la valeur de la première intégrale est inférieure à celle de l'autre, d'où il suit que C est plus petit que l'unité. Dans les cas extrêmes où $c = 0$ et $c = 1$, les intégrations peuvent s'effectuer, et l'on trouve $C = \frac{1}{2}, C = \frac{1}{3}$, d'où l'on peut déjà conclure que, pour une valeur quelconque c, C sera compris entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$.

En développant suivant la formule du binôme, on a

$$(c) \qquad (1 - c^2 \sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}} = 1 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1.3\ldots(2m-3)}{2.4\ldots 2m} c^{2m} \sin^{2m}\varphi;$$

d'ailleurs

$$(d) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m}\varphi\, d\varphi = \frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{2.4\ldots 2m} \frac{\pi}{2}.$$

Maintenant nous avons, en nous reportant au développement (c),

$$\sin^2\varphi (1 - c^2 \sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}} = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1.3\ldots(2m-1)}{2.4\ldots 2m} e^{2m} \sin^{2m+2}\varphi;$$

mais, en remplaçant $2m$ par $2m+2$, la formule (d) nous donne

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+2}\varphi\, d\varphi = \frac{1.3.5\ldots(2m+1)}{2.4\ldots(2m+2)}\frac{\pi}{2}.$$

On a donc, par suite,

$$(d)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}\, d\varphi \\ &\qquad = \frac{\pi}{2}\left\{\frac{1}{2} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2m+1}{(2m-1)(2m+1)}\left[\frac{1.3\ldots(2m-1)}{2.4.6\ldots2m}e^m\right]^2\right\}. \end{aligned}\right.$$

La formule (3) devient alors

$$(4)\qquad C = \frac{\dfrac{1}{2} - \sum_{m=1}^{\infty} \dfrac{2m+1}{(2m-1)(2m+1)}\left[\dfrac{1.3\ldots(2m-1)}{2.4.6\ldots2m}e^m\right]^2}{1 - \sum_{m=1}^{\infty}\dfrac{1}{2m-1}\left[\dfrac{1.3\ldots(2m-1)}{2.4.6\ldots2m}e^m\right]^2}.$$

Lorsque l'excentricité est un peu grande, cette formule exige des calculs assez pénibles, en raison du nombre des termes que l'on est obligé de prendre dans chacune des deux séries pour obtenir une approximation suffisante.

Ce qu'il y aurait de mieux à faire serait de calculer au moyen d'une formule de quadrature, par approximation, les valeurs approchées des intégrales (c) et (d) correspondant à des valeurs de c^2 suffisamment rapprochées les unes des autres, et de former une Table donnant les valeurs correspondantes de C fournies par la formule (3). Nous nous sommes borné, en opérant ainsi, à calculer les éléments suivants [*] :

$$C = 0{,}464 \quad \text{pour} \quad c^2 = \frac{7}{16} \quad \text{ou pour} \quad \frac{b}{a} = \frac{3}{4},$$
$$C = 0{,}419 \quad » \quad c^2 = \frac{3}{4} \quad » \quad \frac{b}{a} = \frac{1}{2},$$
$$C = 0{,}368 \quad » \quad c^2 = \frac{15}{16} \quad » \quad \frac{b}{a} = \frac{1}{4}.$$

[*] Nous avons employé la formule de Poncelet, parce qu'elle offre sur les autres le double avantage d'exiger le calcul d'un nombre moindre d'ordonnées et de donner

Au moyen de ces valeurs, nous avons été conduit à poser par approximation

$$(5)\qquad c = 0,333 + 0,167\sqrt{1 - c^2}.$$

L'erreur relative commise en appliquant cette formule est nulle pour $c = 0, c = 1$; elle est de $\frac{1}{77}$ pour $\frac{b}{a} = \frac{3}{4}$, et de $\frac{1}{53}$ pour $\frac{b}{a} = \frac{1}{4}$, approximation qui est bien suffisante dans les applications.

Comme C est essentiellement positif et inférieur à l'unité quel que soit c, nous pourrons poser

$$(e)\qquad C = \sin^2\alpha,$$

α ne pouvant varier avec c qu'entre les limites 46°30′ et 34°30′, correspondant à $c = 0$ et $c = 1$. La formule (2) prend alors la forme

$$(6)\qquad \mathfrak{M} = \frac{pa^2c^2}{2}(\sin^2\alpha - \sin^2\varphi).$$

On voit ainsi que, par suite de la déformation, la courbure de la fibre moyenne a diminué de A au point m_1 correspondant à $\varphi = \alpha$, point pour lequel il n'y a pas de variation de courbure; entre ce point et B, la courbure a augmenté. En d'autres termes, l'ovalisation a diminué, ce qui est conforme à l'observation et même au sentiment.

Conditions de résistance. — En vertu de la formule (1), la dilatation de la fibre moyenne est donnée par

$$(7)\qquad \delta_0 = \frac{P}{2Ee} = \frac{pa}{2Ee}\,\frac{\sqrt{1-c^2}}{\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}}.$$

---

une limite supérieure de l'erreur commise. Nous avons pris $\Delta = \frac{1}{10}\,\frac{\pi}{2}$ pour l'équidistance. La limite supérieure de l'erreur relative n'a atteint qu'une seule fois $\frac{6}{1000}$ dans l'évaluation de l'intégrale (c) et $\frac{23}{1000}$ dans celle de l'intégrale (d). Nous avons ainsi obtenu une approximation bien suffisante.

Si ρ_0, ρ sont les rayons de courbure de la fibre moyenne avant et après la déformation, on a, en remarquant que $I = \frac{2}{3} e^3$,

$$\frac{2}{3} E e^3 \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right) = \frac{pa^2c^2}{2} (\sin^2\alpha - \sin^2\varphi),$$

d'où, pour la dilatation maximum développée dans une section,

$$(8) \qquad \mp e \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right) = \frac{3}{4} \frac{pa^2c^2}{e 2 E} (\sin^2\alpha - \sin^2\varphi),$$

le signe supérieur et le signe inférieur se rapportant respectivement aux arcs Am_1, m_1B.

En multipliant par E la somme des deux expressions (7) et (8), on obtient, pour l'effort élastique maximum développé dans la section,

$$(9) \qquad S = \frac{pa}{2e}\left[\frac{\sqrt{1-c^2}}{\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}} \mp \frac{3ac^2}{2e}(\sin^2\alpha - \sin^2\varphi)\right].$$

La dérivée de cette expression par rapport à φ s'annule pour

$$\varphi = 90^\circ \quad \text{et} \quad \varphi = 0,$$

et les valeurs maxima correspondantes de S sont respectivement

$$S' = \frac{pa}{2e}\left(1 + \frac{3ac^2}{2e}\cos^2\alpha\right),$$

$$S'' = \frac{pa}{2e}\left(\sqrt{1-c^2} + \frac{3ac^2}{2e}\sin^2\alpha\right).$$

Si l'on exprime que la première est inférieure à la seconde, on trouve

$$\frac{3}{2}\frac{a}{e}(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha) > \frac{1}{1+\sqrt{1-c^2}},$$

inégalité qui sera toujours satisfaite, attendu que $\sin^2\alpha > \cos^2\alpha$ et que le rapport $\frac{3}{2}\frac{a}{e}$ est très-grand ; d'où il suit que le point B est le point

dangereux, et que l'on a, pour déterminer e, l'équation $S'' = \Gamma$, d'où

$$(9) \qquad e = \frac{pa\sqrt{1-c^2} + \sqrt{p^2a^2(1-c^2) + 12pa^2c^2\Gamma\sin^2\alpha}}{4\Gamma}.$$

Cette valeur sera supérieure à celle de

$$\frac{pa\sqrt{1-c^2} + \sqrt{pa^2(1-c^2) + 4pa^2\Gamma c^2}}{\Gamma},$$

que l'on obtient en remplaçant $\sin^2\alpha$ par sa limite inférieure $\frac{1}{3}$. Il est facile de reconnaître que le minimum de cette expression par rapport à c correspond à $c = 0$.

Ainsi donc, en se plaçant au point de vue de l'économie, la forme circulaire doit être préférée pour une chaudière à la forme elliptique, parce que : 1° pour une même capacité, le périmètre de la section est plus petit ; 2° l'épaisseur est plus faible ; 3° le travail de chaudronnerie est plus facile.

Quoique la recherche des variations éprouvées par les coordonnées ne présente qu'un médiocre intérêt, nous nous y arrêterons cependant quelques instants. Nous remarquerons d'abord que l'on a

$$\Delta x = -\frac{1}{EI}\int dy \int \mathfrak{M}\, ds,$$

$$\Delta y = \frac{1}{EI}\int dx \int \mathfrak{M}\, ds,$$

formules indépendantes du choix de la variable au moyen de laquelle on est conduit, suivant les circonstances, à exprimer x, y, z et $\mathfrak{M}$.

Revenant à notre forme elliptique, nous avons

$$\int \mathfrak{M}\, ds = \frac{pa^3c^2}{2}\left(\sin^2\alpha \int_0^\varphi \sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}\, d\varphi - \int_0^\varphi \sin^2\varphi \sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}\, d\varphi\right),$$

et, comme Δx et Δy sont respectivement nuls pour $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, il

vient

$$\Delta x = \frac{pa^3c^2}{2}\sqrt{1-c^2}\left(\sin^2\alpha\int_0^{\varphi}\sin\varphi_1\,d\varphi_1\int_0^{\varphi_1}\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi_1}\,d\varphi_1\right.$$

$$\left. - \int_0^{\varphi}\sin\varphi\,d\varphi\int_0^{\varphi}\sin^2\varphi_1\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi_1}\,d\varphi_1\right),$$

$$\Delta y = \frac{pa^3c^2}{2}\left(\sin^2\alpha\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi}\cos\varphi_1\,d\varphi_1\int_0^{\varphi_1}\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi_1}\,d\varphi_1\right.$$

$$\left. - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi}\cos\varphi_1\,d\varphi_1\int_0^{\varphi}\sin^2\varphi_1\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi_1}\,d\varphi_1\right);$$

mais, en intégrant par parties, on trouve

$$\int_0^{\varphi}\sin\varphi_1\,d\varphi_1\int_0^{\varphi}\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi_1}\,d\varphi_1$$

$$= -\cos\varphi\int_0^{\varphi}\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi_1}\,d\varphi_1 + \int_0^{\varphi}\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi_1}\,d\sin\varphi_1,$$

$$\int_0^{\varphi}\sin\varphi_1\,d\varphi_1\int_0^{\varphi}\sin^2\varphi_1\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi_1}\,d\varphi_1$$

$$= -\cos\varphi\int_0^{\varphi}\sin^2\varphi_1\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi_1}\,d\varphi_1 + \int_0^{\varphi}\sin^2\varphi_1\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi_1}\,d\sin\varphi_1,$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi}\cos\varphi_1\,d\varphi_1\int_0^{\varphi_1}\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi_1}\,d\varphi_1$$

$$= \sin\varphi\int_0^{\varphi}\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi_1}\,d\varphi_1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi_1}\,d\varphi_1$$

$$+ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi}\sqrt{1-c^2+c^2\cos^2\varphi_1}\,d\cos\varphi_1,$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} \cos\varphi\, d\varphi \int_0^{\varphi} \sin^2\varphi \sqrt{1 - c^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi$$

$$= \sin\varphi \int_0^{\varphi} \sin^2\varphi \sqrt{1 - c^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi \sqrt{1 - c^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi$$

$$+ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} \sqrt{1 - c^2 + c^2 \cos^2\varphi}\, d\cos\varphi - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} \cos^2\varphi \sqrt{1 - c^2 + c^2 \cos^2\varphi}\, d\cos\varphi.$$

On voit ainsi que la solution du problème se ramène uniquement à l'introduction des deux transcendantes

$$\int \sqrt{1 - c^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi, \quad \int \sin^2\varphi \sqrt{1 - c^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi,$$

et que, par suite, elle doit être considérée comme complète.

Complément à une étude de 1871 sur la théorie de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques dont certaines dimensions sont très-petites par rapport à d'autres;

PAR M. J. BOUSSINESQ.

SUITE [*].

IV. — ÉQUATIONS D'ÉQUILIBRE D'UNE PLAQUE.

19. Les modes d'équilibre d'un prisme qui servent de type à ceux d'un tronçon de plaque, en ce sens que ces derniers en diffèrent d'autant moins que la plaque est plus mince par rapport à sa longueur et à sa largeur, sont ceux dans lesquels, nulle force extérieure n'étant appliquée aux bases du prisme ni à sa masse, la constitution de la matière, les forces N, T et les déformations ∂, g sont les mêmes aux divers points d'un feuillet quelconque parallèle aux bases. Nous supposerons normal à celles-ci l'axe des z du système local de coordonnées qui sera propre au tronçon.

Les trois équations indéfinies ordinaires de l'équilibre d'un prisme

$$(43)\quad \frac{dN_1}{dx}+\frac{dT_3}{dy}+\frac{dT_2}{dz}=0,\quad \frac{dT_3}{dx}+\frac{dN_2}{dy}+\frac{dT_1}{dz}=0,\quad \frac{dT_2}{dx}+\frac{dT_1}{dy}+\frac{dN_3}{dz}=0$$

deviendront, grâce aux conditions $\frac{d(N,T)}{d(x,y)}=0$, caractéristiques du genre

[*] Voir la première Partie à la page 163 de ce volume.

d'équilibre considéré,

$$\frac{dT_2}{dz}=0,\quad \frac{dT_1}{dz}=0,\quad \frac{dN_3}{dz}=0:$$

combinées avec les relations $T_2=0$, $T_1=0$, $N_3=0$, spéciales à chacune des deux bases, elles reviennent à dire que les trois composantes T_2, T_1, N_3 de l'action mutuelle de deux feuillets quelconques sont nulles partout.

20. Mais, sans faire toutes les hypothèses $\frac{d(N, T)}{d(x, y)}=0$, qui ne sont vraies dans un tronçon de plaque qu'à une première approximation, on ne cessera pas d'avoir un problème abordable, *pour le cas ordinaire où la contexture est symétrique par rapport aux faces des feuillets,* et l'on atteindra, dans le même cas, à une approximation plus élevée pour une plaque plane, pareillement à ce qu'on a vu au n° 4 pour un tronçon de tige, si l'on annule seulement : 1° les dérivées secondes $\frac{d^2N_1}{dy^2}$, $\frac{d^2N_2}{dx^2}$, $\frac{d^2T_3}{dx^2, dx\,dy, dy^2}$; 2° les dérivées premières en x, y des forces T_2, T_1, qui étaient nulles à une première approximation. Rien n'empêchera même d'ajouter aux premiers membres des deux premières équations (43) les composantes respectives, suivant les x et suivant les y, d'une action extérieure rapportée à l'unité de volume, pourvu que les dérivées en x et en y de ces petites composantes soient insensibles.

En effet, les deux premières équations (43), différentiées chacune par rapport à x et par rapport à y, donneront $\frac{d^2N_1}{dx^2, dx\,dy}=0$, $\frac{d^2N_2}{dy^2, dx\,dy}=0$, en sorte que toutes les dérivées secondes en x et y de N_1, N_2, T_3 seront nulles. La troisième (43), réduite à $\frac{dN_3}{dz}=0$, donnera également $N_3=0$, en tenant compte d'une condition spéciale aux bases du prisme. On aura donc, en somme,

$$(44)\qquad N_3=0,\quad \frac{d^2(N_1, N_2, T_3)}{dx^2, dx\,dy, dy^2}=0,\quad \frac{d(T_2, T_1)}{d(x, y)}=0.$$

On voit que *l'action mutuelle de deux feuillets contigus de la plaque se réduit à ses deux composantes tangentielles* T_2, T_1, *ou n'a pas de composante normale sensible* N_3.

Dans ce numéro, je suppose la contexture du prisme symétrique par rapport au plan des xy, ce qui revient à dire : 1° que N_1, N_2, N_3, T_3 dependent seulement de ∂_x, ∂_y, ∂_z, g_{xy}; 2° que T_2, T_1 dépendent seulement de g_{xz}, g_{yz}. Chaque feuillet du prisme étant d'ailleurs homogène dans toute son étendue, l'annulation des dérivées secondes en x et y de N_1, N_2, N_3, T_3 équivaut à poser

$$(45)\qquad \frac{d^2(\partial_x, \partial_y, \partial_z, g_{xy})}{dx^2,\ dx\,dy,\ dy^2} = 0,$$

et celle des dérivées premières de T_2, T_1 en x et y donne à son tour

$$(46)\qquad \frac{d(g_{xz}, g_{yz})}{d(x, y)} = 0.$$

Enfin, vu la formule de N_3, la relation $N_3 = 0$ est une équation qui permet d'exprimer linéairement ∂_z en fonction de ∂_x, ∂_y, g_{xy}, puis de porter cette valeur de ∂_z dans les expressions de N_1, N_2, T_3. Celles-ci deviennent alors de la forme

$$(47)\qquad \left\{\begin{array}{l} N_1 = C(\beta\partial_x + \beta'\partial_y + \beta'' g_{xy}), \quad N_2 = C(\beta_1\partial_x + \beta'_1\partial_y + \beta''_1 g_{xy}), \\ \qquad\qquad T_3 = C(\gamma\partial_x + \gamma'\partial_y + \gamma'' g_{xy}) : \end{array}\right.$$

elles ne dépendent que des déformations ∂_x, ∂_y, g_{xy} éprouvées, au point (x, y), par le *feuillet* qui y passe et dans les sens parallèles à son plan tangent. Nous supposerons que le coefficient positif d'élasticité C puisse seul varier d'un feuillet à l'autre, ou que les coefficients β, β', ..., γ'' soient indépendants de z; *cela revient à admettre que, pour d'égales déformations* ∂_x, ∂_y, g_{xy} *éprouvées par tous les feuillets (supposés isolés) dans leurs propres plans, les forces déformatrices* N_1, N_2, T_3 *conservent, chez tous, les mêmes rapports.*

Les quatre relations (46), en y remplaçant g_{xz}, g_{yz} par $\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}$, $\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}$, puis ajoutant deux résultats, donnent

$$(48)\qquad \frac{d\partial_x}{dz} = -\frac{d^2 w}{dx^2},\quad \frac{d\partial_y}{dz} = -\frac{d^2 w}{dy^2},\quad \frac{d}{dz}\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right) \text{ ou } \frac{dg_{xy}}{dz} = -2\frac{d^2 w}{dx\,dy}.$$

Les seconds membres de celles-ci sont continus quand z varie ou

que l'on passe d'un feuillet à un autre; car le déplacement w a d'égales valeurs pour deux feuillets contigus du prisme, même hétérogènes, et par suite les dérivées de ces valeurs en x et y sont aussi égales. Or, ces trois seconds membres des équations (48), différentiés par rapport à z, donnent zéro pour résultat, parce que trois des relations (45) ne sont autres que $\frac{d^2\partial_z}{dx^2, dy^2, dx\,dy} = 0$. Si donc, en vue de fixer les idées, on appelle w_0 le déplacement transversal w pour la *couche* (tangente à un feuillet du tronçon) qui a été choisie dans sa position primitive comme plan *local* des xy, on peut remplacer w par w_0 dans les équations (48).

Désignons en outre par ∂_x^0, ∂_y^0, g_{xy}^0 les valeurs de ∂_x, ∂_y, g_{xy} sur le même feuillet tangent au plan des xy; les équations (48), multipliées par dz, puis intégrées, donneront

$$(49)\quad \partial_x = \partial_x^0 - \frac{d^2 w_0}{dx^2} z, \quad \partial_y = \partial_y^0 - \frac{d^2 w_0}{dy^2} z, \quad g_{xy} = g_{xy}^0 - 2\,\frac{d^2 w_0}{dx\,dy} z.$$

Ainsi, *les déformations ∂_x, ∂_y, g_{xy}, éprouvées par les feuillets dans les sens parallèles à leurs plans, varient linéairement le long d'une normale à la plaque.*

J'appellerai feuillet *moyen* la surface matérielle, sensiblement parallèle aux deux faces de la plaque ou aux bases du prisme, qui contiendra les centres de gravité des normales menées à cette même surface et d'une base à l'autre dans l'état primitif, les centres dont il s'agit étant déterminés d'après la supposition que chaque élément dz des normales ait une masse, par unité de longueur, égale à la valeur du coefficient d'élasticité C sur cet élément. Le plan local des xy sera supposé constamment tangent au feuillet moyen du tronçon ou du prisme, en sorte qu'on aura, si $\int_h$ désigne une intégrale prise sur toute l'épaisseur h de la plaque,

$$(50)\qquad \int_h C z\,dz = 0.$$

J'appellerai en outre C′ la valeur moyenne de C sur toute l'épaisseur

h, et $C''\frac{h^3}{12}$ le moment d'inertie d'une normale par rapport à son centre de gravité : en d'autres termes, je poserai

$$(50\,bis)\qquad C'h = \int_h C\,dz,\quad C''\frac{h^3}{12} = \int_h Cz^2\,dz.$$

On remarquera que, dans le cas d'une plaque homogène, pour laquelle le coefficient C est constant, ces formules (50 *bis*) reviennent à prendre $C' = C$, $C'' = C$, vu qu'alors z varie de $-\frac{h}{2}$ à $\frac{h}{2}$.

21. *A une première approximation, les formules du numéro précédent subsistent dans le cas général où la matière ne possède aucun plan de symétrie de contexture.* En effet, d'une part, les trois équations $T_2 = 0$, $T_1 = 0$, $N_3 = 0$ trouvées plus haut y donnent g_{xz}, g_{yz}, ∂_z en fonction linéaire de ∂_x, ∂_y, g_{xy}; ce qui ramène les expressions de N_1, N_2, T_3 aux formes (47), où nous admettrons toujours que β, β', ..., γ'' soient indépendants de z. D'autre part, la nullité supposée des dérivées des N, T en x et y entraîne celle des dérivées pareilles des ∂, g; et les relations (45), (46), (48), (49) ne cessent pas non plus d'être admissibles.

Évaluons maintenant, à cette première approximation, les actions totales exercées par unité de longueur à travers deux sections faites dans la plaque suivant deux surfaces matérielles primitivement perpendiculaires au feuillet moyen et entre elles : nous supposerons la première section primitivement normale à l'axe des x, la seconde primitivement normale à l'axe des y.

Les forces T_2, T_1 se trouvant négligeables, la pression exercée sur un élément plan de la section normale aux x n'a que les deux composantes N_1, T_3, dirigées respectivement suivant les x et suivant les y; de même, la pression exercée sur un élément de la section normale aux y n'a que les deux composantes T_3, N_2, dirigées aussi suivant les x et les y. Cherchons la valeur statique totale de ces forces, pour toute une bande comprise entre deux normales au feuillet moyen, menées, très-près l'une de l'autre, dans chaque section.

A cet effet, portons les valeurs (49) de ∂_x, ∂_y, g_{xy} dans les expres-

sions (47) de N_1, N_2, T_3, et posons, pour abréger :

$$(51)\quad \begin{cases} n_1^0 = \beta\partial_x^0 + \beta'\partial_y^0 + \beta'' g_{xy}^0, \quad n_2^0 = \beta_1\partial_x^0 + \beta'_1\partial_y^0 + \beta''_1 g_{xy}^0, \\ t_3^0 = \gamma\partial_x^0 + \gamma'\partial_y^0 + \gamma'' g_{xy}^0; \end{cases}$$

$$(52)\quad \begin{cases} n_1 = \beta \dfrac{d^2 w_0}{dx^2} + \beta' \dfrac{d^2 w_0}{dy^2} + 2\beta'' \dfrac{d^2 w_0}{dx\,dy}, \\ n_2 = \beta_1 \dfrac{d^2 w_0}{dx^2} + \beta'_1 \dfrac{d^2 w_0}{dy^2} + 2\beta''_1 \dfrac{d^2 w_0}{dx\,dy}, \\ t_3 = \gamma \dfrac{d^2 w_0}{dx^2} + \gamma' \dfrac{d^2 w_0}{dy^2} + 2\gamma'' \dfrac{d^2 w_0}{dx\,dy}. \end{cases}$$

Il viendra

$$(53)\quad N_1 = C(n_1^0 - zn_1), \quad N_2 = C(n_2^0 - zn_2), \quad T_3 = C(t_3^0 - zt_3).$$

Occupons-nous d'abord de la bande de section normale aux x.

Les parties Cn_1^0 de N_1 sont des forces parallèles et de mêmes sens sur les divers éléments de cette bande, et il en est de même des parties Ct_3^0 de T_3. Elles équivalent en tout à deux forces appliquées au centre de gravité de la bande, c'est-à-dire à un point de son intersection par le feuillet moyen; la première est parallèle aux x ou perpendiculaire à la bande, la seconde parallèle aux y ou dirigée suivant l'intersection de la bande par le feuillet moyen. Leurs valeurs totales, rapportées à l'unité de largeur de la bande ou à l'unité de longueur de la section, sont respectivement

$$n_1^0 \int_h C\,dz, \quad t_3^0 \int_h C\,dz, \quad \text{ou} \quad C'hn_1^0, \quad C'ht_3^0.$$

Au contraire, les parties $-Cn_1z$, $-Ct_3z$ de N_1, T_3 changent de signe avec z et ont leurs valeurs moyennes nulles d'après la relation (50). Elles équivalent donc à deux couples, dont les moments totaux, rapportés à l'unité de largeur de la bande et supposés positifs quand ils tendent à imprimer à celle-ci une rotation, autour de son centre, dans le sens des x ou des y positifs vers les z positifs, sont respectivement $\int_h z.Cn_1z\,dz$, $\int_h z.Ct_3z\,dz$, c'est-à-dire $C''\frac{h^3}{12}n_1$, $C''\frac{h^3}{12}t_3$. Le premier de ces couples est perpendiculaire à l'intersection de la bande par le feuillet moyen, le second est parallèle à la bande.

De même, les forces exercées sur une bande ou section perpendiculaire aux y équivalent par unité de longueur : 1° à deux forces $C'ht_3^0$, $C'hn_2^0$, l'une tangentielle, l'autre normale, appliquées à son centre de gravité, point situé sur l'intersection de la bande par le feuillet moyen; 2° à deux couples $C''\frac{h^3}{12}t_3$, $C''\frac{h^3}{12}n_2$, qui se trouvent, le premier, parallèle à la bande, le second, perpendiculaire à l'intersection de la bande par le feuillet moyen.

22. Ces résultats ne sont exacts qu'à une première approximation, c'est-à-dire dans l'hypothèse multiple que la constitution et l'état de la matière soient les mêmes, à l'intérieur du tronçon, sur toute l'étendue d'un feuillet quelconque parallèle au feuillet moyen, que ces feuillets soient plans à l'état naturel, et que ni les bases ni la masse du tronçon ne supportent aucune action extérieure. En réalité, les pressions, quelles qu'elles soient, exercées sur une bande infiniment étroite, primitivement perpendiculaire à une ligne matérielle du feuillet moyen et comprise entre deux autres lignes matérielles d'abord normales à ce feuillet, équivalent en tout : 1° à trois forces appliquées en un point de l'intersection de la bande par le feuillet moyen et dirigées, l'une suivant la ligne primitivement normale à la bande, la seconde suivant l'intersection de celle-ci par le feuillet moyen, la troisième suivant la normale aux deux premières; 2° à deux couples respectivement perpendiculaires, le premier, à l'intersection de la bande par le feuillet moyen, le second, à la ligne qui était primitivement normale à la bande. Il n'y a pas à considérer un troisième couple parallèle au feuillet moyen, parce qu'il serait de l'ordre du carré de la largeur de la bande, et par conséquent négligeable, comme composé de forces comparables à cette largeur et ayant des bras de levier également de l'ordre de la même largeur. Ce qui précède montre que, pour les bandes ou sections primitivement normales aux x et aux y, les composantes, suivant leurs intersections mutuelles par le feuillet moyen, des forces totales qu'elles supportent, ont, par unité de longueur primitive des sections, des valeurs peu différentes respectivement de

$$\mathfrak{N}_x = C'hn_1^0, \quad \mathfrak{T} = C'ht_3^0; \quad \mathfrak{T} = C'ht_3^0, \quad \mathfrak{N}_y = C'hn_2^0.$$

Ces valeurs, vu les expressions (51) de n_1^0, n_2^0, t_3^0, reviennent à celles-ci :

$$(54)\quad \begin{cases} \mathfrak{N}_x = C'h(\beta\,\partial_x^0 + \beta'\partial_y^0 + \beta'' g_{xy}^0), \\ \mathfrak{N}_y = C'h(\beta_1\partial_x^0 + \beta'_1\partial_y^0 + \beta''_1 g_{xy}^0), \\ \mathfrak{T} \;= C'h(\gamma\partial_x^0 + \gamma'\partial_y^0 + \gamma'' g_{xy}^0). \end{cases}$$

Quant aux couples qui sont appliqués aux mêmes bandes et qui se trouvent tous normaux au plan du feuillet moyen, en les rapportant aussi à l'unité de longueur primitive des sections, et désignant les deux qui sont perpendiculaires aux bandes (*couples de flexion*) par ν_x, ν_y, les deux qui sont à peu près parallèles aux bandes (dits *couples de torsion*), et qui ne diffèrent pas sensiblement l'un de l'autre, par τ, on aura, sauf erreurs négligeables,

$$\nu_x = C''\frac{h^3}{12}n_1, \quad \nu_y = C''\frac{h^3}{12}n_2, \quad \tau = C''\frac{h^3}{12}t_3,$$

c'est-à-dire, à cause des valeurs (52) de n_1, n_2, t_3,

$$(55)\quad \begin{cases} \nu_x = \dfrac{C''h^3}{12}\left(\beta\dfrac{d^2w_0}{dx^2} + \beta'\dfrac{d^2w_0}{dy^2} + 2\beta''\dfrac{d^2w_0}{dx\,dy}\right), \\ \nu_y = \dfrac{C''h^3}{12}\left(\beta_1\dfrac{d^2w_0}{dx^2} + \beta'_1\dfrac{d^2w_0}{dy^2} + 2\beta''_1\dfrac{d^2w_0}{dx\,dy}\right), \\ \tau = \dfrac{C''h^3}{12}\left(\gamma\dfrac{d^2w_0}{dx^2} + \gamma'\dfrac{d^2w_0}{dy^2} + 2\gamma''\dfrac{d^2w_0}{dx\,dy}\right). \end{cases}$$

Enfin, nous désignerons par

$$Z_x,\ Z_y$$

les composantes respectives, suivant la normale au feuillet moyen ou à fort peu près suivant les z, des actions totales exercées par unité de longueur sur la section perpendiculaire aux x et sur la section perpendiculaire aux y. Ces composantes (appelées *efforts tranchants*), nulles à une première approximation ou dans le cas limite d'une égale répartition des pressions en tous les points d'un même feuillet, deviennent sensibles à une seconde approximation.

Les déformations ∂_x^0, ∂_y^0, g_{xy}^0, qui paraissent dans les expressions (54) de $\mathfrak{N}_x$, $\mathfrak{N}_y$, $\mathfrak{T}$, sont celles que le feuillet moyen a éprouvées suivant les

sens parallèles à son plan tangent, à l'endroit considéré. Les dérivées $\frac{d^2 w_0}{dx^2}$, $\frac{d^2 w_0}{dy^2}$, $\frac{d^2 w_0}{dx\,dy}$, dont dépendent les valeurs (55) des couples ν_x, ν_y, τ, caractérisent parfaitement les courbures prises au même endroit par une surface matérielle primitivement plane et tangente au feuillet moyen, courbures représentant elles-mêmes les modifications éprouvées par celles du feuillet moyen. Si l'on parvient à calculer les déplacements, dans l'espace, des divers points de ce feuillet, on pourra connaître, en chaque endroit ou pour chaque tronçon, les quantités ∂_x^0, ∂_y^0, g_{xy}^0, $\frac{d^2 w_0}{dx^2}$, $\frac{d^2 w_0}{dy^2}$, $\frac{d^2 w_0}{dx\,dy}$, et puis y évaluer les déformations éprouvées par la matière, au moyen des formules approchées (49) et de celles qui donnent g_{xz}, g_{yz}, ∂_z en fonction de ∂_x, ∂_y, g_{xy}.

25. Voyons actuellement comment s'obtiendront les équations indéfinies d'équilibre de la plaque. Il suffira de considérer, à cet effet, un filet de matière compris entre quatre sections infiniment voisines, primitivement normales deux à deux et au feuillet moyen, puis d'appliquer à ce filet infiniment petit les principes des quantités de mouvement par rapport à trois axes rectangulaires, et celui des moments par rapport aux intersections du feuillet moyen par deux faces contiguës du filet. On aura ainsi, entre $\mathfrak{N}_x$, $\mathfrak{N}_y$, $\mathfrak{T}$, ν_x, ν_y, τ, Z_x, Z_y, ou leurs dérivées dans des sens parallèles au feuillet moyen, cinq équations, que l'élimination de Z_x, Z_y ramènera à trois : or il faut précisément trois équations indéfinies pour déterminer les composantes, suivant trois axes, des déplacements des divers points du feuillet moyen.

Bornons-nous au cas d'une plaque primitivement plane, peu déformée, et supposons qu'on ait pris pour plan *général* des xy le feuillet moyen dans sa position primitive. Nous construirons, à partir du point quelconque du feuillet moyen dont les coordonnées primitives sont x, y et que *caractériseront* ces coordonnées, un filet de matière qui ait, dans son état primitif, pour hauteur l'épaisseur h de la plaque et pour section normale un élément rectangulaire, $dx\,dy$, du feuillet moyen, à côtés infiniment petits, dx, dy, respectivement parallèles aux x et aux y. J'appellerai : ρ la densité moyenne primitive de ce filet de matière, ou $\rho h\,dx\,dy$ sa masse, et $\rho h X\,dx\,dy$, $\rho h Y\,dx\,dy$, $\rho h Z\,dx\,dy$ les composantes totales, suivant les trois axes

fixes rectangulaires ox, oy, oz, des actions extérieures qu'il supporte.

On sait que les deux éléments rectilignes du feuillet moyen, primitivement égaux à dx, dy, qui partent du point matériel (x, y), auront pour projections sur les axes, après de petits déplacements u_0, v_0, w_0, le premier, $\left(1+\frac{du_0}{dx}\right)dx$, $\frac{dv_0}{dx}dx$, $\frac{dw_0}{dx}dx$; le second, $\frac{du_0}{dy}dy$, $\left(1+\frac{dv_0}{dy}\right)dy$, $\frac{dw_0}{dy}dy$. En divisant respectivement ces projections par les racines carrées de la somme de leurs carrés, on trouve que les cosinus des angles que font avec les axes ces éléments rectilignes, après les déformations, valent sensiblement 1, $\frac{dv_0}{dx}$, $\frac{dw_0}{dx}$ pour le premier; $\frac{du_0}{dy}$, 1, $\frac{dw_0}{dy}$ pour le second. Par suite, les cosinus des angles faits avec les axes par la normale au feuillet moyen seront $-\frac{dw_0}{dx}$, $-\frac{dw_0}{dy}$, 1. Tels sont les neuf cosinus par lesquels il faudra multiplier les forces respectives $-\mathfrak{N}_x\,dy$, $-\mathfrak{T}\,dy$, $-Z_x\,dy$, appliquées à la première face $h\,dy$ du filet, et les forces analogues, valant sensiblement $-\mathfrak{T}\,dx$, $-\mathfrak{N}_y\,dx$, $-Z_y\,dx$, qui sont appliquées à la première face $h\,dx$, pour avoir leurs composantes sur les trois axes ox, oy, oz. Les composantes appliquées aux faces opposées auront des expressions pareilles, mais changées de signe et augmentées respectivement de leurs différentielles par rapport à x ou par rapport à y. En négligeant devant les dérivées $\frac{d(\mathfrak{N}_x, \mathfrak{N}_y, \mathfrak{T})}{d(x, y)}$ les produits, par les petits cosinus $\frac{dv_0}{dx}$, $\frac{dw_0}{dx}$, $\cdots$ ou plutôt par leurs dérivées, soit des forces mêmes $\mathfrak{N}_x$, $\mathfrak{N}_y$, $\mathfrak{T}$, qui sont de l'ordre des petites déformations ∂_x^0, ∂_y^0, g_{xy}^0, soit surtout des forces encore plus petites Z_x, Z_y (numéro précédent), il vient pour composantes totales, suivant les x, les y et les z, des pressions appliquées aux quatre faces du filet considéré de matière,

$$\left(\frac{d\mathfrak{N}_x}{dx}+\frac{d\mathfrak{T}}{dy}\right)dx\,dy, \quad \left(\frac{d\mathfrak{T}}{dx}+\frac{d\mathfrak{N}_y}{dy}\right)dx\,dy,$$

$$\left[\frac{d}{dx}\left(Z_x+\mathfrak{N}_x\frac{dw_0}{dx}+\mathfrak{T}\frac{dw_0}{dy}\right)+\frac{d}{dy}\left(Z_y+\mathfrak{T}\frac{dw_0}{dx}+\mathfrak{N}_y\frac{dw_0}{dy}\right)\right]dx\,dy.$$

Égalons à zéro les sommes respectives de ces expressions et des

composantes $\rho h \mathrm{X}\, dx\, dy$, $\rho h \mathrm{Y}\, dx\, dy$, $\rho h \mathrm{Z}\, dx\, dy$ de l'action extérieure; puis divisons les résultats par $dx\, dy$. Il viendra

$$(56) \qquad \frac{d\mathfrak{N}_x}{dx} + \frac{d\mathfrak{T}}{dy} + \rho h \mathrm{X} = 0, \quad \frac{d\mathfrak{T}}{dx} + \frac{d\mathfrak{N}_y}{dy} + \rho h \mathrm{Y} = 0;$$

$$(57) \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{d\mathrm{Z}_x}{dx} + \frac{d\mathrm{Z}_y}{dy}\right) + \left(\mathfrak{N}_x \frac{d^2 w_0}{dx^2} + 2\,\mathfrak{T} \frac{d^2 w_0}{dx\,dy} + \mathfrak{N}_y \frac{d^2 w_0}{dy^2}\right) \\ &\qquad + \frac{dw_0}{dx}\left(\frac{d\mathfrak{N}_x}{dx} + \frac{d\mathfrak{T}}{dy}\right) + \frac{dw_0}{dy}\left(\frac{d\mathfrak{T}}{dx} + \frac{d\mathfrak{N}_y}{dy}\right) + \rho h \mathrm{Z} = 0. \end{aligned} \right.$$

Les deux équations (56), dans lesquelles on portera les valeurs (54) de $\mathfrak{N}_x$, $\mathfrak{N}_y$, $\mathfrak{T}$ en fonction de ∂_x^0, ∂_y^0, g_{xy}^0, c'est-à-dire en fonction de $\frac{du_0}{dx}$, $\frac{dv_0}{dy}$, $\frac{du_0}{dy} + \frac{dv_0}{dx}$, régissent l'équilibre d'*extension* ou de *contraction* de la plaque : elles serviront à calculer les déplacements u_0, v_0 éprouvés par le feuillet moyen dans les sens des coordonnées x, y parallèles à son plan primitif.

Quant à l'équation (57), on peut y remplacer $\frac{d\mathfrak{N}_x}{dx} + \frac{d\mathfrak{T}}{dy}$, $\frac{d\mathfrak{T}}{dx} + \frac{d\mathfrak{N}_y}{dy}$ par les valeurs $-\rho h \mathrm{X}$, $-\rho h \mathrm{Y}$ tirées de (56), puis observer que la somme $\rho h \left(\mathrm{Z} - \mathrm{X}\frac{dw_0}{dx} - \mathrm{Y}\frac{dw_0}{dy}\right)$, qui y paraît alors et qui représente la projection totale, sur la normale au feuillet moyen, de l'action extérieure rapportée à l'unité de surface de celui-ci, peut être généralement confondue avec $\rho h \mathrm{Z}$. Cette équation devient donc

$$(58) \quad \left(\frac{d\mathrm{Z}_x}{dx} + \frac{d\mathrm{Z}_y}{dy}\right) + \left(\mathfrak{N}_x \frac{d^2 w_0}{dx^2} + 2\,\mathfrak{T} \frac{d^2 w_0}{dx\,dy} + \mathfrak{N}_y \frac{d^2 w_0}{dy^2}\right) + \rho h \mathrm{Z} = 0.$$

24. Il reste, pour déterminer Z_x, Z_y, à appliquer aux forces qui sollicitent le filet considéré $h\, dx\, dy$ le principe des moments par rapport aux deux éléments rectilignes, émanés du point matériel (x, y), qui étaient primitivement dx, dy.

Les actions extérieures, exercées sur le filet, n'auront que leurs composantes parallèles au feuillet moyen, dont les bras de levier soient sensibles, et ces composantes, en tout de l'ordre du produit $dx\, dy$, ne donneront même que des moments totaux négligeables si elles se trouvent distribuées à peu près pareillement de part et d'autre du feuillet moyen. En outre, les composantes $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{T}$, tangentes à ce feuil-

let, des forces appliquées aux quatre faces du filet, n'auront que des moments négligeables, vu que leur résultante, pour chaque face, sera de l'ordre de dx ou de dy, et passera à des distances infiniment petites du second ordre, sinon même nulles, des éléments matériels dy ou dx par rapport auxquels se prennent les moments. Seules, les forces $-Z_x dy$, $-Z_y dx$, $\left(Z_x+\frac{dZ_x}{dx}dx\right)dy$, $\left(Z_y+\frac{dZ_y}{dy}dy\right)dx$, dont les bras de levier autour de dy et dx vaudront, à fort peu près, o et $\frac{dy}{2}$ pour la première, $\frac{dx}{2}$ et o pour la seconde, dx et $\frac{dy}{2}$ pour la troisième, $\frac{dx}{2}$ et dy pour la quatrième, donneront des moments de l'ordre du produit $dx\,dy$: ces moments égaleront en tout $Z_x dx\,dy$ par rapport à dy, $Z_y\,dx\,dy$ par rapport à dx. Il faudra y joindre la somme des moments, par rapport à dy ou à dx, des huit couples appliqués aux quatre faces du filet, et dont quatre,

$$-\nu_x dy,\quad \left(\nu_x+\frac{d\nu_x}{dx}dx\right)dy,\quad -\tau dx,\quad \left(\tau+\frac{d\tau}{dy}dy\right)dx,$$

sont sensiblement perpendiculaires à dy, les quatre autres,

$$-\tau dy,\quad \left(\tau+\frac{d\tau}{dx}dx\right)dy,\quad -\nu_y dx,\quad \left(\nu_y+\frac{d\nu_y}{dy}dy\right)dx,$$

sensiblement perpendiculaires à dx.

Ces huit couples peuvent être simplement ajoutés deux à deux, algébriquement, sauf erreurs négligeables. En effet, les deux couples $-\nu_x dy$, $\left(\nu_x+\frac{d\nu_x}{dx}dx\right)dy$, par exemple, sont perpendiculaires, le premier, à une droite dont les angles avec les axes ont pour cosinus $\frac{du_0}{dy}$, 1, $\frac{dw_0}{dy}$, le second, à une droite dont les angles avec les axes ont les mêmes cosinus augmentés de leurs différentielles en x. L'angle de ces deux droites est donc de l'ordre du produit de dx par les petites dérivées en x de $\frac{du_0}{dy}$, $\frac{dw_0}{dy}$; et le couple $\left(\nu_x+\frac{d\nu_x}{dx}dx\right)dy$ peut être décomposé en deux, l'un, normal à la même droite que le couple

$-\nu_x dy$ et égal au produit de $\left(\nu_x + \frac{d\nu_x}{dx}dx\right)dy$ par le cosinus de ce petit angle, cosinus évidemment réductible à l'unité sauf erreur de l'ordre de dx^2, l'autre normal à une droite perpendiculaire et égal au produit de $\left(\nu_x + \frac{d\nu_x}{dx}dx\right)dy$ par le cosinus de l'angle complémentaire ou par le petit sinus de l'angle considéré. Le premier de ces couples, ajouté à $-\nu_x dy$, donnera simplement $\frac{d\nu_x}{dx}dx\,dy$; le second, étant de l'ordre du produit de $\nu_x\,dy\,dx$ par les petites dérivées en x de $\frac{du_0}{dy}$, $\frac{dv_0}{dy}$, sera négligeable en comparaison de couples tels que $\frac{d(\nu_y, \tau)}{d(y, x)}dy\,dx$, à côté desquels on aurait à le compter. Les huit couples pourront ainsi se réduire à quatre, dont deux, normaux à dy, vaudront en tout, sensiblement, $\left(\frac{d\nu_x}{dx} + \frac{d\tau}{dy}\right)dx\,dy$, et dont les deux autres, normaux à dx, vaudront de même $\left(\frac{d\tau}{dx} + \frac{d\nu_y}{dy}\right)dx\,dy$. Chacun de ces deux couples totaux ne donnera pas d'ailleurs de moment appréciable par rapport à l'axe auquel il est à fort peu près parallèle.

En résumé, le principe des moments conduit à annuler les deux sommes

$$\left(Z_x + \frac{d\nu_x}{dx} + \frac{d\tau}{dy}\right)dx\,dy, \quad \left(Z_y + \frac{d\tau}{dx} + \frac{d\nu_y}{dy}\right)dx\,dy,$$

ou à poser

$$(59) \qquad Z_x = -\left(\frac{d\nu_x}{dx} + \frac{d\tau}{dy}\right), \quad Z_y = -\left(\frac{d\tau}{dx} + \frac{d\nu_y}{dy}\right).$$

Ces valeurs de Z_x, Z_y, portées dans (58), donnent enfin la troisième équation indéfinie de l'équilibre, celle qui régit la *flexion* de la plaque :

$$(60) \quad \begin{cases} -\left(\frac{d^2\nu_x}{dx^2} + 2\frac{d^2\tau}{dx\,dy} + \frac{d^2\nu_y}{dy^2}\right) \\ \quad + \left(\mathfrak{N}_x \frac{d^2 w_0}{dx^2} + 2\mathfrak{T}\frac{d^2 w_0}{dx\,dy} + \mathfrak{N}_y \frac{d^2 w_0}{dy^2}\right) + \rho h Z = 0. \end{cases}$$

Il ne reste plus qu'à y substituer aux couples ν_x, ν_y, τ leurs expressions (55) en fonction des courbures prises par le feuillet moyen.

25. Les termes non linéaires de (60), c'est-à-dire ceux qui contiennent les produits de $\mathfrak{N}_x$, $\mathfrak{N}_y$, $\mathfrak{T}$ par les dérivées secondes de w_0, sont insensibles pour une plaque simplement fléchie, sans extension ni compression dans les sens parallèles à son plan, et même pour une plaque d'une certaine épaisseur soumise à des tensions ou compressions. Mais ils deviennent très-sensibles, ou même prédominants, quand la plaque n'a qu'une épaisseur h fort petite et que les couples ν_x, ν_y, τ, comparables à h^3 d'après (55), deviennent comme des infiniment petits d'ordre supérieur devant les tensions $\mathfrak{N}_x$, $\mathfrak{N}_y$, $\mathfrak{T}$ qui, d'après (54), sont de l'ordre de h. Alors la plaque ne résiste presque à la flexion qu'en vertu des tensions qu'elle supporte, et elle prend le nom de *membrane*.

On peut voir, dans mon Mémoire *Sur les plaques,* de 1871, comment les trois équations ordinaires de l'équilibre d'un élément de volume, multipliées par dz et intégrées à partir de la base inférieure de la plaque, font connaître, soit les petites composantes transversales T_3, T_2, négligées à une première approximation, des pressions exercées sur les éléments plans de deux sections normales aux x et aux y, pressions dont l'analyse ci-dessus donne seulement les résultantes (*efforts tranchants*) Z_x, Z_y, soit même la très-petite composante normale N_3 de la pression supportée par les feuillets de la plaque. Il est à remarquer que la théorie générale des plaques présente à cet égard bien moins de complication que celle des tiges. Cela tient à ce que des difficultés d'intégration qu'on ne pouvait s'empêcher d'aborder dans la théorie des tiges, et qu'on a résolues en effet (pour le cas où la contexture est symétrique par rapport aux sections normales) quand on a trouvé aux équations (13) les intégrales (18), ont pu être évitées dans la théorie générale des plaques. Mais aussi les équations (56), (60), qui restent à intégrer dans ce dernier cas, présenteront des difficultés autrement grandes que les équations (34) et (36) relatives aux tiges.

Je renverrai également au Mémoire de 1871 pour tout ce qui concerne l'établissement des conditions spéciales au contour des plaques. Je n'y ai fait usage que d'un principe universellement admis, et dont M. de Saint-Venant a montré à plusieurs reprises l'importance. Ce principe peut s'énoncer ainsi : *Des forces extérieures qui se font équi-*

libre sur un solide élastique, et dont les points d'application se trouvent tous compris à l'intérieur d'une sphère donnée, ne produisent que des déformations insensibles à des distances de cette sphère qui sont d'une certaine grandeur par rapport à son rayon. Il répugnerait, en effet, que l'influence statique de certaines actions, confinées *toutes* dans une région déterminée, pût se faire sentir avec une intensité notable jusqu'à des distances quelconques de cette région. Par suite, et à cause du principe de la superposition des petits effets, qui s'étend aux solides élastiques peu déformés, le mode effectif d'équilibre d'une plaque ne sera changé que d'une manière insignifiante, si l'on applique à une petite portion de son contour un système de forces, comparables individuellement à celles que supporte déjà cette portion de contour, mais se faisant mutuellement équilibre. Les nouvelles déformations dues à ces forces n'auront de valeurs sensibles que dans le voisinage de la région d'application : au delà, elles disparaîtront devant celles qui proviennent des forces primitivement appliquées à la même région. Si l'on introduit pareillement, sur toutes les petites portions du contour, des systèmes de forces se faisant équilibre, les déformations totales qui en résulteront seront négligeables en comparaison des déformations antérieures dues à l'ensemble des forces que supportait déjà la plaque, abstraction faite toutefois d'une zone de peu de largeur, contiguë au contour. En d'autres termes, on a le droit de remplacer les vraies actions extérieures, exercées sur le cylindre contournant, par d'autres distribuées comme on voudra, pourvu qu'elles équivaillent statiquement aux premières sur toute partie du cylindre très-petite en tous sens. J'ai montré que les actions extérieures dont il s'agit, pour chaque portion du cylindre contournant comprise entre deux génératrices voisines, sont ainsi réductibles à une force s'exerçant sur le feuillet moyen et à un couple normal au contour du même feuillet (couple de *flexion*). A l'inverse, quelles que soient les valeurs totales de cette force et de ce couple, on peut statiquement les décomposer en actions élémentaires, réparties sur le cylindre contournant de telle sorte que les modes simples ou réguliers de déformation qui s'observent à une certaine distance des bords se continuent jusqu'aux bords mêmes : et c'est ce que l'on suppose toujours, pour plus de simplicité.

Il est vrai que cette manière de procéder revient, comme dans la

théorie des tiges, à ne pas tenir compte des déformations très-complexes qui se produisent aux extrémités des corps allongés ou aplatis, là où l'état de la matière varie aussi rapidement dans les sens des grandes dimensions que dans ceux des petites. Mais le calcul général de ces déformations ou *perturbations locales* n'est pas actuellement abordable à l'analyse, et, d'ailleurs, il y aurait toujours lieu d'en faire d'abord abstraction pour ne s'occuper que du phénomène d'ensemble, bien plus simple. En toute rigueur, les vraies relations spéciales au contour d'une plaque *dont on suppose les bases libres* consisteraient, pour chaque point d'une génératrice du cylindre contournant, à égaler les trois composantes de la pression exercée du dedans sur ce cylindre à trois fonctions arbitraires de la coordonnée transversale z, qui exprimeraient les trois composantes analogues de la pression extérieure. On aurait donc une infinité de conditions se rapportant à une même bande du cylindre contournant. Seulement, pour le but que l'on se propose, toutes ces relations sont insignifiantes, en tant qu'elles servent à régler les perturbations locales, et il suffit d'extraire de leur ensemble, comme on a pu le faire grâce au principe énoncé, les conditions strictement nécessaires et suffisantes pour déterminer les *vraies* déformations générales produites [*].

---

[*] Depuis que la rédaction de ce Mémoire est terminée, j'ai reconnu que MM. Thomson et Tait avaient, quatre ans avant moi, dans leur beau *Traité de philosophie naturelle* (1867, nos 645 à 648), envisagé la question des conditions spéciales au contour des plaques exactement comme je l'ai fait en 1871. Ils ont en outre, aux nos 724 à 729 du même Traité, donné sous leur forme approchée des termes qui expriment les plus simples des perturbations locales et qui justifient analytiquement, comme le font voir les illustres professeurs écossais, la réduction des couples de torsion à des efforts tranchants, que Poisson n'avait pas aperçue. Ces mêmes termes, retrouvés en 1877 par M. Maurice Levy, mais seulement sous une forme plus générale et plus complexe qui n'en montrait pas le vrai sens, ont été l'occasion d'une polémique engagée d'abord par lui au *Journal de Mathématiques* (juillet 1877), puis continuée dans les *Comptes rendus* de l'Académie des Sciences (17 et 31 décembre 1877; 14 janvier, 4 et 18 février 1878), et qui, je l'espère du moins, n'aura pas été inutile pour l'éclaircissement de cette question délicate.

Sur les covariants des formes binaires

(DEUXIÈME MÉMOIRE);

PAR M. CAMILLE JORDAN.

Tous les géomètres connaissent les beaux Mémoires dans lesquels M. Gordan a démontré qu'un système de formes binaires ne possède qu'un nombre limité de covariants indépendants.

La détermination effective de cette limite constitue néanmoins un problème assez difficile. Nous avons donné, dans un précédent Mémoire (*Journal de Liouville*, 1876), une formule récurrente qui fournit une première solution de cette question. Mais la limite déduite de cette formule est beaucoup trop élevée; sa détermination exige d'ailleurs un calcul assez laborieux.

En serrant le problème de plus près, nous avons obtenu une nouvelle solution, fondée sur les mêmes principes que la précédente, mais beaucoup moins imparfaite. Nous arrivons en effet, entre autres résultats, à la proposition suivante :

THÉORÈME. — *Soient a, b, c,... un système de formes binaires en nombre quelconque, dont les ordres respectifs ne surpassent pas* N. *Tout covariant de ce système sera une fonction linéaire de produits* RST *ainsi définis.*

R *est un covariant dont l'ordre* O *et le degré* D *par rapport aux coef-*

ficients sont limités par les inégalités suivantes :

$$\mathrm{O} < 2\mathrm{N}^2,$$
$$\mathrm{D} < (9\mathrm{N}^2 - \mathrm{O})\, 3^{\rho+1},$$

où ρ est le plus grand entier satisfaisant à l'inégalité $\rho - 1 < \dfrac{\log \frac{\mathrm{N}}{4}}{\log \frac{4}{3}}$.

S *est un produit de covariants dont l'ordre ne surpasse pas* $2\mathrm{N} - 2$ *et dont le degré ne surpasse pas* $2.3^{\rho+1}$.

T *est un produit d'invariants dont le degré est inférieur à* $(7\mathrm{N} - 5)\, 3^{\rho+1}$.

Analyse.

§ I.

1. Soient a, b, c, ... f, g.... des formes binaires, en nombre quelconque, mais dont l'ordre ne surpasse pas N; proposons-nous de déterminer les covariants de ce système.

Nous répartirons les formes données en deux espèces. La première contiendra les formes a, b, c, ..., dont l'ordre surpasse le plus grand nombre entier N_1 contenu dans $\frac{3}{4}$ N; la seconde, les formes f, g, ..., dont l'ordre $\leq \mathrm{N}_1$.

Soient a, b, c, ... les formes de première espèce; p, q, r, ... leurs ordres respectifs; construisons les covariants à deux symboles tels que

$$(ab)^{\mu} a_x^{p-\mu} b_x^{q-\mu},$$

et les covariants à trois symboles tels que

$$(ab)^{\gamma} (ca)^{\beta} (bc)^{\alpha} a_x^{p-\beta-\gamma} b_x^{q-\gamma-\alpha} c_x^{r-\alpha-\beta}.$$

Soient φ, φ_1, ... ceux de ces covariants dont l'ordre $p + q - 2\mu$ ou $p + q + r - 2\alpha - 2\beta - 2\gamma$ ne surpasse pas N_1. Nous adjoindrons ces nouvelles formes aux formes f, g, ...

Soient maintenant a', b', c', ... celles des formes f, g, ..., φ, φ_1 dont l'ordre surpasse le plus grand entier N_2 contenu dans $\frac{3}{4}\mathrm{N}_1$; f', g', ... les autres.

Soient φ', φ'_1, ... ceux des covariants à deux ou trois symboles construits avec les formes a', b', c', ..., dont l'ordre ne surpasse pas N_2. Nous adjoindrons ces covariants aux formes f', g', ...

Soient de même a'', b'', c'', ... celles des formes f', g', ..., φ', φ'_1, ..., dont l'ordre surpasse le plus grand entier N_3 contenu dans $\frac{3}{4}N_2$; f'', g'', ... les autres. Soient φ'', φ''_1, ... ceux des covariants à deux ou trois symboles construits avec a'', b'', c'', ..., dont l'ordre ne surpasse pas N_3. Nous les adjoindrons aux formes f'', g'': ... et ainsi de suite.

2. Ayant ainsi adjoint au système des formes données a, b, c, ..., f, g, ... les formes auxiliaires φ, φ_1, ..., φ', φ'_1, ..., cherchons à construire les covariants du système ainsi complété.

Chacun de ces covariants sera une fonction linéaire de produits symboliques formés avec les symboles des formes a, b, c, ... f, g, ..., φ, φ_1, ..., φ', φ'_1, ... Ces produits pourront être classés d'après le nombre des symboles qu'ils contiennent, en commençant par ceux qui en contiennent le moins. Tout produit exprimable linéairement à l'aide d'autres produits d'une classe inférieure pourra évidemment être négligé comme formant double emploi avec les précédents.

Ce cas se présentera pour tout produit P contenant en facteur $(ab)^\mu$, a et b désignant des formes de première espèce dont les ordres p et q satisfassent à l'inégalité

$$p + q - 2\mu \leqq N_1.$$

On sait, en effet, que P peut s'exprimer linéairement à l'aide des *composés* [*] de covariants

$$(1)\qquad (ab)^{\mu'} a_x^{p-\mu'} b_x^{q-\mu'} \quad (\text{où } \mu' \geqq \mu),$$

avec des produits formés avec les autres symboles c, d, ... qui figurent dans P. On a d'ailleurs

$$p + q - 2\mu' \leqq p + q - 2\mu \leqq N_1.$$

[*] *Überschiebungen* de M. Gordan. Cette proposition, ainsi que les autres propriétés relatives à la composition des covariants, dont nous aurons à faire un fréquent usage, se trouvent exposées en détail dans la *Théorie des formes binaires* de M. Clebsch. Nous les avons reproduites dans notre Mémoire de 1876, Sections I à IV.

Chacun des covariants (1) est donc une des formes auxiliaires $\varphi, \varphi_1, \ldots$. Chacun des composés au moyen desquels P est exprimé est donc exprimable par les symboles $c, d, \ldots$ joints à un des symboles $\varphi, \varphi_1, \ldots$, lequel remplace les deux symboles a, b qui figuraient dans P. Sa classe sera donc inférieure à celle de P.

On verra de même que tout produit P qui contient en facteur $(ab)^\gamma (ca)^\beta (bc)^\gamma$, où a, b, c sont des formes de première espèce, dont les ordres p, q, r satisfassent à la relation

$$p + q + r - 2\alpha - 2\beta - 2\gamma \leqq N_1,$$

est exprimable par des covariants de classe inférieure, contenant chacun à la place des trois symboles a, b, c un symbole de l'une des formes $\varphi, \varphi_1, \ldots$.

3. Considérons un produit P qui ne soit pas exprimable par des produits de classe inférieure. Parmi les symboles qu'il contient, les uns, $a, b, c, \ldots$ représenteront en général des formes de première espèce; les autres, $f, g, \ldots, \varphi, \ldots$, des formes de seconde espèce; et l'on sait que P peut s'exprimer linéairement au moyen des composés de produits Q formés avec les symboles $a, b, c, \ldots$, avec des produits R formés avec les symboles $f, g, \ldots, \varphi, \ldots$.

La formation des produits R est une question analogue à la question primitive, sauf que les formes qui y figurent ont pour limite supérieure de leur ordre, au lieu de N, le nombre N_1, qui lui est inférieur. Le problème étant ainsi simplifié de ce côté, il conviendra de reporter notre attention sur les produits Q.

En formant ces produits Q, nous pourrons négliger tous ceux qui sont linéairement exprimables à l'aide de produits $Q_1, Q_2, \ldots$ de classe moindre. Soit, en effet, $Q = m_1 Q_1 + m_2 Q_2 + \ldots$ un semblable produit. Tout composé de Q avec un produit R s'exprimera linéairement au moyen des composés de $Q_1, Q_2, \ldots$ avec R, lesquels sont évidemment de classe moindre que le composé de Q.

4. Soit $Q = (ab)^\mu (ca)^\nu \ldots$ l'un des produits qui restent à considérer, et soit μ le plus grand des exposants $\mu, \nu, \ldots$ qui y affectent des déterminants. On dira que Q est de la $\mu^{\text{ième}}$ catégorie.

Ce nombre μ est nécessairement $< \frac{5}{8}$N; sinon, Q serait négligeable; car, p et q étant $\overline{\gtrless}$ N, on aurait

$$p + q - 2\mu \overline{\gtrless} \tfrac{3}{4}\mathrm{N} \overline{\gtrless} \mathrm{N}_1.$$

Nous considérerons les produits Q comme d'autant plus simples que leur catégorie est plus élevée.

Un produit de la $\mu^{\text{ième}}$ catégorie sera dit *réductible,* s'il est linéairement exprimable par des covariants dont chacun soit ou négligeable ou d'une catégorie supérieure à μ. Il est clair que tout produit réductible pourra être supprimé de la série des produits Q, comme formant double emploi.

Ces préliminaires posés, étudions les produits Q.

§ II.

5. Nous aurons en premier lieu les produits à deux symboles, tels que

$$(ab)^\mu a_x^{p-\mu} b_x^{q-\mu} \quad (\text{où } p+q-2\mu > \mathrm{N}_1).$$

Nous les désignerons par la notation K_μ^{ab}, ou plus simplement K_μ, lorsqu'il ne sera pas nécessaire de spécifier les symboles qui y figurent.

6. Les produits à trois symboles seront de la forme

$$(2) \qquad (ab)^\gamma (ca)^\beta (bc)^\alpha a_x^{p-\beta-\gamma} b_x^{q-\alpha-\gamma} c_x^{r-\alpha-\beta}.$$

D'ailleurs l'identité

$$(3) \qquad (ab)c_x + (bc)a_x + (ca)b_x = 0$$

permettra d'établir un certain nombre de relations entre ceux de ces covariants qui correspondent à une même valeur de la somme

$$\alpha + \beta + \gamma = n.$$

Divers cas seront à distinguer suivant la grandeur de n.

7. *Premier cas.* — Supposons d'abord que chacun des entiers p, q, r soit au moins égal à n. L'expression (2) sera divisible par $[(ca)b_x)]^\beta$.

Remplaçant ce facteur par la quantité équivalente

$$[-(ab)c_x - (bc)a_x]^\beta,$$

et développant celle-ci par la formule du binôme, on aura l'expression du produit donné en fonction linéaire des produits analogues qui ne contiennent plus le facteur (ca).

Si nous posons, pour abréger,

$$(ab)^{n-\rho}(bc)^\rho a_x^{p-n+\rho} b_x^{q-n} c_x^{r-\rho} = C^\rho_{abc},$$

ces derniers covariants seront les suivants : $C^0_{abc}, C^1_{abc}, \dots, C^n_{abc}$. Leur nombre est $n+1$; enfin il est évident que l'identité (3) ne fournit entre eux aucune relation. Ils sont donc indépendants.

On verrait de même qu'en posant

$$(bc)^{n-\rho}(ca)^\rho b_x^{q-n+\rho} c_x^{r-n} a_x^{p-\rho} = C^\rho_{bca},$$
$$(ca)^{n-\rho}(ab)^\rho c_x^{r-n+\rho} a_x^{p-n} b_x^{q-\rho} = C^\rho_{cab},$$

les covariants considérés pourront s'exprimer à volonté au moyen des $n+1$ covariants $C^0_{bca}, \dots, C^n_{bca}$ ou au moyen des $n+1$ covariants $C^0_{cab}, \dots, C^n_{cab}$.

Mais on peut choisir d'une manière plus avantageuse le système des $n+1$ covariants indépendants à l'aide desquels on se propose d'exprimer tous les autres.

En effet, si dans C^ρ_{cab} on remplace, comme il vient d'être expliqué, le produit $[(ca)b_x]^{n-\rho}$ par sa valeur déduite de l'identité (3), il viendra

$$(4)\quad (-1)^{n-\rho} C^\rho_{cab} = C^0_{abc} + (n-\rho)C^1_{abc} + \dots + \frac{(n-\rho)\dots(n-\rho-i+1)}{1.2\dots i} C^i_{abc} + \dots.$$

Posant successivement $\rho = 0, 1, \dots, l$, l étant un entier quelconque $< n$, on obtiendra $l+1$ équations qui permettront de déterminer $l+1$ des quantités C^i_{abc}, par exemple $C^{k+1}_{abc}, \dots, C^{l+k+1}_{abc}$ en fonction des autres et des quantités $C^0_{cab}, \dots, C^l_{cab}$. Il faut pour cela que le déterminant de ces équations ne soit pas nul. Mais on peut vérifier aisément qu'il en est ainsi. (*Voir* notre Mémoire de 1876, n°s 58 et 59.)

On a d'autre part

$$(5)\qquad C^{\rho}_{abc} = [-(ca)b_x - (bc)a_x]^{n-\rho}(bc)^{\rho} a_x^{p-n-\rho} b_x^{q-n} c_x^{r-n}$$

et, développant par la formule du binôme, on obtiendra l'expression de C^{ρ}_{abc} en fonction linéaire de $C^0_{bca}, \ldots, C^{n-\rho}_{bca}$.

Faisant successivement $\rho = l + k + 2, \ldots, n$ et posant, pour abréger, $n - l - k - 2 = m$, on aura, par la formule (5), $C^{l+k+2}_{abc}, \ldots, C^n_{abc}$ exprimés en fonction de $C^0_{bca}, \ldots, C^m_{bca}$.

Donc $C^0_{abc}, \ldots, C^n_{abc}$ pourront être exprimés en fonction des nouveaux covariants indépendants

$$C^0_{abc}, \ldots, C^k_{abc};\quad C^0_{cab}, \ldots, C^l_{cab};\quad C^0_{bca}, \ldots, C^m_{bca},$$

k, l, m étant trois entiers quelconques non négatifs et ayant pour somme $n - 2$.

On pourra en particulier choisir ces entiers de telle sorte qu'aucun d'eux ne surpasse $\frac{n}{3}$. En effet, si n est de la forme $3i + 2$, il suffira de poser $k = l = m = i$. Si $n = 3i + 1$, on posera $k = l = i$, $m = i - 1$. Si $n = 3i$, on posera $k = i$, $l = m = i - 1$.

Les nombres k, l, m étant ainsi choisis, chacun des covariants $C^0_{abc}, \ldots, C^m_{bca}$ sera d'une catégorie au moins égale à $\frac{2n}{3}$; car chacun d'eux contient en facteur une des expressions

$$(ab)^{n-k},\ (ca)^{n-l},\ (bc)^{n-m}.$$

8. *Deuxième cas.* — Supposons encore $p \geqq n$, $q \geqq n$, mais $r < n$. Posons $n - r = \lambda$. L'exposant de c_x dans l'expression (2) ne pouvant être négatif, on aura $r \geqq \alpha + \beta$; d'ailleurs $n = \alpha + \beta + \gamma$; d'où $\gamma \geqq \lambda$.

Les covariants à étudier contiennent donc tous en facteur l'expression $(ab)^{\lambda}$; et, pour obtenir les relations qui existent entre eux, il suffira de transformer au moyen de l'identité (3) le facteur complémentaire

$$(6)\qquad (ab)^{\gamma-\lambda}(ca)^{\beta}(bc)^{\alpha} a_x^{p-\beta-\gamma} b_x^{q-\gamma-\alpha} c_x^{r-\beta-\alpha},$$

auquel on pourra d'ailleurs appliquer la méthode du cas précédent.

Car la somme n' des exposants des déterminants y est égale à $n - \lambda$; d'autre part, les degrés respectifs p', q', r' de cette expression par rapport à chacun des symboles a, b, c sont $p - \lambda$, $q - \lambda$, r. Ayant

$$n = r + \lambda \leqq p \leqq q,$$

on aura

$$n' = r' \leqq p' \leqq q'.$$

Les divers produits de la forme (6) sont donc exprimables en fonction linéaire de $n' + 1$ d'entre eux, dont chacun sera divisible par l'un des trois facteurs $(ab)^{n'-k}$, $(ca)^{n'-l}$, $(bc)^{n'-m}$, si k, l, m sont des entiers non négatifs, ayant pour somme $n' - 2$ et d'ailleurs arbitraires. Remplaçant n' par sa valeur $n - \lambda$ et rétablissant le facteur $(ab)^\lambda$, on voit que les covariants à étudier s'expriment par des produits symboliques tous divisibles par l'un des trois facteurs $(ab)^{n-k}$, $(ca)^{n-\lambda-l}$, $(bc)^{n-\lambda-m}$, k, l, m étant des entiers non négatifs choisis de manière à satisfaire à la relation

$$(7) \qquad k + l + m = n - \lambda - 2.$$

On remarquera d'ailleurs que $n - \lambda - 2$ ne peut être négatif. En effet, on a

$$p \leqq \text{N}, \quad n - \lambda = r > \text{N}_1 > \frac{3}{4}\text{N}.$$

D'autre part,

$$r < n < p \leqq p - 1;$$

donc

$$\frac{3}{4}\text{N} < \text{N} - 1,$$

d'où

$$\text{N} > 4, \quad n - \lambda > 3.$$

On pourra donc satisfaire à la relation (7) par un système de valeurs non négatives de k, l, m qui ne surpassent pas $\frac{n - \lambda}{3}$.

Ces entiers ayant été ainsi choisis, les produits divisibles par $(ca)^{n-\lambda-l}$ seront négligeables. Il suffit pour le montrer de prouver que l'on a

$$p + r - 2(n - \lambda - l) \leqq \text{N}_1.$$

Mais on a

$$n-\lambda-l \geqq \frac{2}{3}(n-\lambda) \geqq \frac{2}{3}r, \quad p \leqq \mathrm{N}, \quad r > \frac{3}{4}\mathrm{N},$$

d'où

$$p+r-2(n-\lambda-l) \leqq p-\frac{1}{3}r < \frac{3}{4}\mathrm{N} = \mathrm{N}_1.$$

Les produits divisibles par $(bc)^{n-\lambda-m}$ seront également négligeables.

Enfin, les produits divisibles par $(ab)^{n-k}$ seront de la forme

$$(ab)^{\rho}(ca)^{\sigma}(bc)^{\tau}a_x^{p-\rho-\sigma}b_x^{q-\rho-\tau}c_x^{r-\sigma-\tau},$$

où

$$\rho \geqq n-k, \quad \rho+\sigma+\tau = n.$$

D'ailleurs, q étant $> n$, cette expression contiendra le facteur $[(ca)b_x]^{\sigma}$. En le remplaçant par la quantité équivalente $[-(ab)c_x-(bc)a_x]^{\sigma}$ et développant, on obtiendra l'expression des produits dont il s'agit, en fonction linéaire de produits de la forme

$$(ab)^{\mu}(bc)^{\nu}a_x^{p-\mu}b_x^{q-\mu-\nu}c_x^{r-\nu},$$

où

$$\mu \geqq \rho \geqq \tfrac{2}{3}n, \quad \mu+\nu = n.$$

9. *Troisième cas.* — Soit maintenant $p \geqq n$, mais $q < n$, $r < n$. Posons $n-r=\lambda$, $n-q=\mu$. On aura, comme dans le cas précédent, $\gamma \geqq \lambda$, et de même $\beta \geqq \mu$.

Les covariants à étudier contiennent donc tous le facteur $(ab)^{\lambda}(ca)^{\mu}$; et les relations qui les lient résulteront de la transformation du facteur complémentaire

$$(ab)^{\gamma-\lambda}(ca)^{\beta-\mu}(bc)^{\alpha}a_x^{p-\beta-\gamma}b_x^{q-\gamma-\alpha}c_x^{r-\beta-\alpha},$$

où la somme n' des exposants des déterminants est égale à $n-\lambda-\mu$, tandis que les degrés p', q', r' par rapport à a, b, c sont respectivement $p-\lambda-\mu$, $q-\lambda$, $r-\mu$, quantités au moins égales à n'. Traitant donc ce facteur d'après la méthode du premier cas, on l'exprimera linéairement par des produits symboliques tous divisibles par l'un des facteurs $(ab)^{n'-k}$, $(ac)^{n'-l}$, $(bc)^{n'-m}$, où

$$(8) \qquad k+l+m = n'-2 = n-\lambda-\mu-2.$$

Remplaçant n' par $n - \lambda - \mu$ et rétablissant le facteur $(ab)^{\lambda}(ca)^{\mu}$, on aura l'expression des covariants à étudier par des produits symboliques contenant en facteur

$$(ab)^{n-\mu-k}, \quad (ca)^{n-\lambda-l}, \quad \text{ou} \quad (bc)^{n-\lambda-\mu-m}.$$

D'ailleurs $n - \lambda - \mu - 2$ ne peut être négatif. On a en effet

$$n - \lambda = r > \tfrac{3}{4}\mathrm{N}, \quad n - \mu = q > \tfrac{3}{4}\mathrm{N}, \quad n \geqq p \leqq \mathrm{N},$$

d'où

$$n - \lambda - \mu > \tfrac{1}{2}\mathrm{N} > 2,$$

car on a $\mathrm{N} > 4$ (*voir* la discussion du deuxième cas).

Désignons, suivant l'usage, par $\mathrm{E}(x)$ le plus grand entier contenu dans x.

Si l'on a

$$\mathrm{E}\left(\frac{n-\mu}{3}\right) + \mathrm{E}\left(\frac{n-\lambda}{3}\right) < n - \lambda - \mu - 2,$$

on pourra satisfaire à l'équation (8) en posant

$$k = \mathrm{E}\left(\frac{n-\mu}{3}\right), \quad l = \mathrm{E}\left(\frac{n-\lambda}{3}\right),$$

$$m = n - \lambda - \mu - 2 - \mathrm{E}\left(\frac{n-\mu}{3}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{n-\lambda}{3}\right)$$
$$< n - \lambda - \mu - \frac{n-\mu}{3} - \frac{n-\lambda}{3} < \frac{n - 2\lambda - 2\mu}{3}.$$

Dans le cas contraire, on pourra y satisfaire en posant $m = 0$, et donnant à k et l des valeurs respectivement non supérieures à $\mathrm{E}\left(\frac{n-\mu}{3}\right)$ et $\mathrm{E}\left(\frac{n-\lambda}{3}\right)$.

Si k, l, m sont ainsi déterminés, tous les produits symboliques auxquels nous avons ramené nos covariants seront négligeables.

En effet, on aura

$$p - q - 2(n - \mu - k) \leqq \mathrm{N} + n - \mu - 2\left[n - \mu - \tfrac{1}{3}(n - \mu)\right]$$
$$\leqq \mathrm{N} - \tfrac{1}{3}q \leqq \mathrm{N} - \tfrac{1}{4}\mathrm{N} \leqq \tfrac{3}{4}\mathrm{N} \leqq \mathrm{N}_1.$$

Donc les covariants divisibles par $(ab)^{n-\mu-k}$ seront négligeables.

De même pour ceux qui sont divisibles par $(ca)^{n-\lambda-l}$.

Enfin ceux qui sont divisibles par $(bc)^{n-\lambda-\mu-m}$ seront négligeables, si la quantité $q+r-2(n-\lambda-\mu-m)=\lambda+\mu+2m$ est $\leqq \frac{3}{4}$N.

Mais, si $m < \frac{n-2\lambda-2\mu}{3}$, on aura

$$\lambda+\mu+2m < \frac{2n-\lambda-\mu}{3} < \frac{2}{3}n < \frac{2}{3}\mathrm{N},$$

et si $m = 0$ on aura

$$q = n-\mu > \tfrac{3}{4}\mathrm{N}, \quad r = n-\lambda \geqq \tfrac{3}{4}\mathrm{N}, \quad n \leqq \mathrm{N},$$

d'où

$$\lambda+\mu+2m = \lambda+\mu \leqq \tfrac{1}{2}\mathrm{N}.$$

10. *Quatrième cas.* — Supposons enfin p, q, r tous inférieurs à n; faisant $r = n-\lambda$, $q = n-\mu$, $p = n-\nu$, on aura

$$\gamma \geqq \lambda, \quad \beta \geqq \mu, \quad \alpha \geqq \nu.$$

Les covariants à étudier contiendront tous en facteur $(ab)^{\lambda}(ca)^{\mu}(bc)^{\nu}$. Le facteur complémentaire pourra être traité par la méthode du premier cas. On trouvera ainsi que les covariants cherchés s'expriment en fonction de produits symboliques, contenant en facteur une des expressions

$$(ab)^{n-\mu-\nu-k}, \quad (ca)^{n-\lambda-\nu-l}, \quad (bc)^{n-\lambda-\mu-m},$$

si k, l, m sont des entiers non négatifs satisfaisant à la relation

$$(9) \qquad k+l+m = n-\lambda-\mu-\nu-2.$$

Le second membre de cette relation sera d'ailleurs > 0, si le covariant donné n'est pas immédiatement négligeable. En effet, on doit avoir

$$p+q+r-2n > \tfrac{3}{4}\mathrm{N},$$

ou

$$(10) \qquad n-\lambda-\mu-\nu > \tfrac{3}{4}\mathrm{N}.$$

Mais on a

$$n-\lambda = r \leqq \mathrm{N}, \quad \mu \geqq 1, \quad \nu \geqq 1;$$

et par suite

$$N - 2 > \tfrac{3}{4} N, \quad N > 8,$$
$$n - \lambda - \mu - \nu > \tfrac{3}{4} N > 6.$$

De la relation (10) on déduit encore

$$N - \mu - \nu > \tfrac{3}{4} N, \quad N - \lambda - \mu > \tfrac{3}{4} N,$$

d'où

$$\mu + \nu < \tfrac{1}{4} N, \quad \lambda + \mu < \tfrac{1}{4} N,$$

et enfin, si nous supposons $\nu \overset{=}{<} \mu$, ce qui est permis, on aura

$$\nu < \tfrac{1}{8} N, \quad n = p + \nu < \tfrac{9}{8} N.$$

Cela posé, les produits symboliques divisibles par $(ab)^{n-\mu-\nu-k}$ seront négligeables si l'on a

$$p + q - 2(n - \mu - \nu - k) \overset{=}{<} \tfrac{3}{4} N,$$

ou

(11) $$\mu + \nu + 2k \overset{=}{<} \tfrac{3}{4} N.$$

Les autres produits symboliques le seront également si l'on a

(12) $$\lambda + \nu + 2l \overset{=}{<} \tfrac{3}{4} N,$$
(13) $$\lambda + \mu + 2m \overset{=}{<} \tfrac{3}{4} N.$$

Or on peut déterminer k, l, m de manière à satisfaire à la fois à ces inégalités et à l'équation (9).

En effet, si la quantité

$$\delta = n - \lambda - \mu - \nu - 2 - \mathrm{E}\left(\frac{3}{8} N - \frac{\mu + \nu}{2}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{3}{8} N - \frac{\lambda + \nu}{2}\right)$$

est positive, on pourra poser

$$k = \mathrm{E}\left(\frac{3}{8} N - \frac{\mu + \nu}{2}\right), \quad l = \mathrm{E}\left(\frac{3}{8} N - \frac{\lambda + \nu}{2}\right), \quad m = \delta.$$

Dans le cas contraire, on pourra poser

$$k = \mathrm{E}\left(\frac{3}{8} N - \frac{\mu + \nu}{2}\right), \quad l = \mathrm{E}\left(\frac{3}{8} N - \frac{\lambda + \nu}{2}\right), \quad m = 0.$$

Ce système de valeurs satisfait évidemment aux inégalités (11) et (12). La relation (13) sera également satisfaite.

En effet, soit $m = \delta$: on aura

$$m < n - \lambda - \mu - \nu = \left(\frac{3}{8}\mathrm{N} - \frac{\mu+\nu}{2}\right) - \left(\frac{3}{8}\mathrm{N} - \frac{\lambda+\nu}{2}\right) < \frac{3}{8}\mathrm{N} - \frac{\lambda+\mu}{2},$$

d'où

$$\lambda + \mu + 2m < \tfrac{3}{4}\mathrm{N}.$$

D'autre part, si $m = 0$, on aura

$$\lambda + \mu + 2m = \lambda + \mu < \tfrac{1}{4}\mathrm{N}.$$

11. Nous obtenons donc comme résultat de cette discussion le théorème suivant.

Théorème. — *Les produits à trois symboles tels que*

$$(ab)^{\gamma}(ca)^{\beta}(bc)^{\alpha}a_x^{p-\beta-\gamma}b_x^{q-\alpha-\gamma}c_x^{r-\alpha-\beta},$$

où $\alpha + \beta + \gamma = n$ s'expriment linéairement :

1° *Par des termes négligeables si deux au moins des entiers p, q, r sont inférieurs à n;*

2° *Par des termes négligeables et des produits de la forme*

$$(ab)^{\mu}(bc)^{\nu}a_x^{p-\mu}b_x^{q-n}c_x^{r-\nu}, \tag{14}$$

où

$$\mu + \nu = n, \quad \mu \gtreqless \frac{2n}{3} \gtreqless 2\nu,$$

si $p > q \gtreqless n > r$;

3° *Par des termes négligeables et des termes de la forme (14) et des formes analogues*

$$(ca)^{\mu}(ab)^{\nu}c_x^{r-\mu}a_x^{p-n}b_x^{q-\nu},$$
$$(bc)^{\mu}(ca)^{\nu}b_x^{q-\mu}c_x^{r-n}a_x^{p-\nu},$$

où

$$\mu + \nu = n, \quad \mu \gtreqless \frac{2n}{3} \gtreqless 2\nu,$$

si p, q, r sont tous $> n$.

12. Corollaire. — *Tout produit symbolique P de catégorie γ sera réductible, s'il est divisible par $(ab)^{\gamma}(ca)^{\beta}(bc)^{\alpha}$, $\alpha + \beta$ étant $> \frac{1}{2}\gamma$.*

On sait, en effet, que P s'exprime au moyen des composés de produits symboliques

$$Q = (ab)^{\gamma'}(ca)^{\beta'}(bc)^{\alpha'} a_x^{p-\beta'-\gamma'} b_x^{q-\alpha'-\gamma'} c_x^{r-\alpha'-\beta'},$$

où $\alpha' \geqq \alpha$, $\beta' \geqq \beta$, $\gamma' > \gamma$, avec des produits R contenant les autres symboles d, e, ... qui figurent dans P.

Or les covariants Q s'expriment à l'aide de termes négligeables et de termes de catégorie $\geqq \frac{2}{3}(\alpha' + \beta' + \gamma') \geqq \frac{2}{3}(\alpha + \beta + \gamma) > \gamma$. Ces termes, composés avec les produits Q, donneront des termes négligeables ou de catégorie $> \gamma$.

15. Théorème. — *Un produit* P *à quatre symboles, tel que*

$$(ab)^{\gamma}(ca)^{\beta}(bc)^{\alpha}(ad)^{\delta}(bd)^{\varepsilon}(cd)^{\zeta} a_x^{p-\gamma-\beta-\delta} b_x^{q-\gamma-\alpha-\varepsilon} c_x^{r-\beta-\alpha-\zeta} d_x^{s-\delta-\varepsilon-\zeta},$$

sera réductible si le plus grand γ *des exposants* $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ *est moindre que la somme des cinq autres.*

Si $\delta + \varepsilon + \zeta = 0$, l'inégalité admise $\gamma < \alpha + \beta + \delta + \varepsilon + \zeta$ deviendra $\gamma < \alpha + \beta$, et P sera réductible (12).

Il en est évidemment de même si $\beta + \alpha + \zeta = 0$.

Enfin la proposition est évidente si $\gamma \geqq \frac{5}{8}N$, car on aura dans ce cas

$$p + q - 2\gamma \leqq \frac{3}{4}N,$$

et P sera négligeable.

Cela posé, nous allons établir que, si la proposition est vraie pour les produits de catégorie $< \gamma$, et pour ceux de catégorie γ où l'un des nombres $\delta + \varepsilon + \zeta$, $\beta + \alpha + \zeta$ est inférieur à λ, elle sera encore vraie pour un produit P de catégorie γ où l'un de ces deux nombres, par exemple $\delta + \varepsilon + \zeta$, est égal à λ.

Ce produit P est l'un des termes du $\lambda^{\text{ième}}$ composé de la forme

$$F = (ab)^{\gamma}(ca)^{\beta}(bc)^{\alpha} a_x^{p-\beta-\gamma} b_x^{q-\alpha-\gamma} c_x^{r-\alpha-\beta}$$

avec la forme d.

Le composé lui-même $(F, d)^{\lambda}$ ne différera de P que par des termes de la forme

$$\psi = k(ab)^{\gamma'}(ca)^{\beta'}(bc)^{\alpha'}(ad)^{\delta'}(bd)^{\varepsilon'}(cd)^{\zeta'} a_x^{p-\gamma'-\beta'-\delta'} \cdots,$$

où k est une constante, γ', β', α' des nombres au moins égaux à γ, β, α et dont la somme est $\alpha+\beta+\gamma+i$, i étant >0; enfin, δ', ε', ζ' étant des nombres dont la somme est $\lambda-i$.

Le terme ψ est réductible, par hypothèse, car sa catégorie $\overline{\geq}\gamma'\overline{\geq}\gamma$, et, d'autre part, $\delta'+\varepsilon'+\zeta'<\lambda$.

Si donc $(F,d)^\lambda$ est réductible, P le sera.

Mais si F était réductible, $(F,d)^\lambda$ le serait évidemment. Donc F doit être irréductible. Il faut pour cela (11 et 12) qu'on ait $\gamma\overline{\geq}2(\alpha+\beta)$, et de plus que deux au moins des nombres p, q, r, et, par suite, l'un au moins des nombres p, q, soient $\overline{\geq}\alpha+\beta+\gamma$.

Soit, par exemple, $q\overline{\geq}\alpha+\beta+\gamma$; F contiendra en facteur $(ac)^\beta b_x^\beta$, qu'on pourra remplacer par $[-(bc)a_x-(ab)c_x]^\beta$.

Développant par la formule du binôme, on aura F exprimé linéairement par des termes de la forme

$$G=(ab)^\mu(bc)^\nu a_x^{p-\mu}b_x^{q-\mu-\nu}c_x^{r-\nu},$$

où

$$\mu+\nu=\alpha+\beta+\gamma,\quad \mu\overline{\geq}\gamma\overline{\geq}2(\alpha+\beta)\overline{\geq}2\nu.$$

Ceux de ces termes où $\mu>\gamma$, composés avec d, donneront des termes de catégorie $>\gamma$.

Restent les termes où $\mu=\gamma$, d'où $\nu=\alpha+\beta$. Considérons l'un d'entre eux G.

Un quelconque des termes du composé $(G,d)^\lambda$ ne différant du composé lui-même que par des termes réductibles, comme on l'a vu tout à l'heure, il suffit de s'assurer que l'un de ces termes H, choisi arbitrairement, est réductible.

Or, si $\lambda\overline{\leq}p+q-2\mu-\nu$, on pourra prendre pour H le terme

$$(ab)^\mu(bc)^\nu(ad)^i(bd)^{\lambda-i}a_x^{p-\mu-i}\ldots,$$

où i est un entier quelconque tel que l'on ait $i\overline{\leq}p-\mu$, $\lambda-i\overline{\leq}q-\mu-\nu$. Ce terme est réductible; car on a par hypothèse $\gamma<\alpha+\beta+\delta+\varepsilon+\zeta$, ou $\mu<\nu+\lambda$; d'autre part, $\nu\overline{\leq}\frac{1}{2}\mu$; donc $\lambda>\frac{1}{2}\mu$; donc H, étant divisible par $(ab)^\mu(ad)^i(bd)^{\lambda-i}$, sera réductible (12).

Soit, au contraire, $\lambda=p+q-2\mu-\nu+\rho$, ρ étant >0. Nous prendrons pour H le terme

$$(ab)^\mu(bc)^\nu(ad)^{p-\mu}(bd)^{q-\mu-\nu}(cd)^\rho c_x^{r-\nu-\rho}d_x^{n-\lambda},$$

lequel sera réductible, par hypothèse, si $\nu + \rho < \lambda$. Or, on a

$$\lambda - \nu - \rho = p + q - 2\mu - 2\nu \geqq p + q - 3\mu$$

avec $p + q - 2\mu \geqq \frac{3}{4}N$ et $\mu < \frac{5}{8}N$ (sinon II serait négligeable); donc

$$\lambda - \nu - \rho \geqq \frac{3}{4}N - \frac{5}{8}N > 0.$$

Le théorème est donc démontré.

§ III.

14. Théorème. — *Tout covariant des formes a, b, c,.... est une fonction linéaire de termes négligeables et de produits de l'espèce* PQ, *où* Q *représente un produit de formes prises dans la série des formes a, b, c, ..., ou dans la série de leurs covariants K_μ à deux symboles,* P *représentant, d'autre part, un produit de l'espèce suivante :*

$$(ab)^\mu (bc)^\nu (cd)^{\mu_1} (de)^{\nu_1} \dots a_x^{p-\mu} b_x^{q-\mu-\nu} \dots,$$

où les exposants μ, ν, μ_1, ν_1, ... satisfont aux relations

$$\begin{array}{ll} \mu < \frac{5}{8}N, & 0 < \nu \leqq \frac{1}{2}\mu, \\ \mu_1 \leqq \mu - \nu, & 0 < \nu_1 \leqq \frac{1}{2}\mu_1, \\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots \\ \mu_i \leqq \mu_{i-1} - \nu_{i-1}, & 0 < \nu_i \leqq \frac{1}{2}\mu_i. \\ \dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots \end{array}$$

15. Ce théorème est évident pour les covariants à deux symboles, et nous l'avons établi pour ceux qui en contiennent trois. Nous allons voir que le théorème, étant supposé vrai pour les covariants à m symboles, le sera pour ceux à $m+2$ symboles.

Il suffira d'établir la proposition pour un des produits symboliques dont ces covariants sont linéairement formés. Elle est d'ailleurs évidente pour tout produit dont la catégorie serait $\geqq \frac{5}{8}N$, un semblable produit étant négligeable. Nous aurons donc prouvé le théorème en montrant qu'il est vrai pour les produits irréductibles de catégorie μ, en supposant qu'il le soit pour les produits de catégorie $> \mu$.

Soit $\pi = (ab)^\mu (ac)^\alpha \dots (cd)^\beta \dots a_x^{p-\mu-\alpha-\dots}$ un produit de catégorie μ.

Soit ν le nombre total de ceux de ses déterminants qui contiennent un des deux symboles a, b associé à un des autres symboles $c, d, \ldots$. On sait que π sera l'un des termes du $\nu^{\text{ième}}$ composé du covariant $K_\mu^{ab} = (ab)^\mu a_x^{p-\mu} b_x^{q-\mu}$ avec un covariant ψ contenant les symboles $c, d, \ldots$

Le théorème sera évident si $\nu = 0$. En effet, π se réduit au produit $\psi . K_\mu^{ab}$. Or ψ, ne contenant que m symboles, s'exprimera, par hypothèse, en fonction linéaire de termes négligeables et de produits de l'espèce PQ, lesquels, étant multipliés par le facteur K_μ^{ab}, donneront évidemment des produits de même espèce.

Le théorème sera donc prouvé, en général, si nous montrons qu'il est vrai pour une valeur quelconque de ν, en le supposant vrai pour les valeurs inférieures.

Or, on sait que le terme π ne diffère du composé $(K_\mu^{ab}, \psi)^\nu$ que par des composés tels que $(K_{\mu'}^{ab}, \psi')^{\nu'}$, où ψ' est un nouveau covariant à m symboles, μ' un nombre au moins égal à μ, et ν' un nombre inférieur à ν.

Chacun de ces composés, étant développé, donnera une série de termes dont la catégorie est au moins égale à μ'; elle sera donc supérieure à μ, si $\mu' > \mu$. Si, au contraire, $\mu' = \mu$, le nombre ν' des déterminants où les symboles a, b s'y trouvent associés aux autres symboles sera $< \nu$. Donc le théorème sera vrai, par hypothèse, pour chacun de ces termes.

Le théorème sera donc vrai pour π, s'il l'est pour $(K_\mu^{ab}, \psi)^\nu$, et réciproquement.

Or ψ, ne contenant que m symboles, s'exprime en fonction linéaire de termes négligeables et de produits PQ. Le composé $(K_\mu^{ab}, \psi)^\nu$ s'exprimera donc en fonction linéaire de termes négligeables et de composés de l'espèce $(K_\mu^{ab}, \text{PQ})^\nu$.

Tout revient donc à démontrer le théorème pour un quelconque de ces derniers composés, ou, ce qui revient au même, pour un de ses termes T, choisi à volonté.

16. Soit, pour fixer les idées,

$$\text{P} = (cd)^{\mu_1} (de)^{\nu_1} \ldots c_x^{r-\nu_1} d_x^{s-\mu_1-\nu_1} \ldots,$$

μ_1, $\nu_1, \ldots$ satisfaisant aux conditions

$$\mu_1 \leqq \tfrac{5}{8}\text{N}, \quad \nu_1 \leqq \tfrac{1}{2}\mu_1, \quad \mu_2 \leqq \mu_1 - \nu_1, \quad \ldots$$

énoncées au théorème. Soient toujours $p, q, r, \ldots$ les ordres des formes $a, b, c, \ldots$, et supposons, ce qui est permis, $q \overline{>} p$.

Parmi les termes du composé $(K_\mu^{ab}, PQ)^\nu$, nous en choisirons un T où le déterminant (bc) figure à la plus haute puissance possible. Cette puissance sera évidemment égale au plus petit des trois nombres $\nu, q-\mu, r-\mu_1$.

1° Si $r-\mu_1$ n'est supérieur ni à ν ni à $q-\mu$, le terme en question contiendra en facteur $(ab)^\mu (bc)^{r-\mu_1} (cd)^{\mu_1}$.

Ce terme sera négligeable si $\mu \overline{>} \frac{5}{8}$ N. Dans le cas contraire, on aura

$$r-\mu_1+\mu_1 = r > \tfrac{3}{4}\mathrm{N} > \mu.$$

Donc ce terme sera réductible (13); et le théorème, étant supposé vrai pour les covariants de catégorie $>\mu$ au moyen desquels T est exprimé, sera vrai pour T.

2° Admettons en second lieu que $q-\mu$ ne soit supérieur ni à ν ni à $r-\mu_1$. Le terme considéré contiendra en facteur $(ab)^\mu (bc)^{q-\mu}$ et sera réductible, si l'on n'a pas $\mu \overline{>} 2(q-\mu)$. Il le sera également si l'on n'a pas $p+q-2\mu > \frac{3}{4}$ N et *a fortiori* $2(q-\mu) > \frac{3}{4}$ N. Mais ces conditions réunies donneraient $\mu > \frac{3}{4}$N, et le terme serait négligeable

3° Admettons, comme dernière hypothèse, que ν soit moindre que $q-\mu$ et $r-\mu_1$. On aura

$$\mathrm{T} = (ab)^\mu (bc)^\nu (cd)^{\mu_1} (de)^{\mu_2} \ldots a_x^{p-\mu} \ldots \mathrm{Q}.$$

Ce terme étant divisible par $(ab)^\mu (bc)^\nu$ ainsi que par $(ab)^\mu (bc)^\nu (cd)^{\mu_1}$ sera encore réductible si l'on n'a pas $\nu \overline{<} \frac{1}{2}\mu$, $\mu \overline{>} \nu+\mu_1$ (**12** et **15**). Mais, si ces conditions sont satisfaites, il satisfera à l'énoncé du théorème.

IV.

17. Théorème. — *Tout covariant du système* $a, b, c, \ldots, f, g, \ldots, \varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi', \varphi'_1, \ldots$ *est une fonction linéaire de produits* RST *ainsi définis :*

R *représente, ou l'unité, ou un produit symbolique, tel que son ordre*

soit inférieur à $2N^2$ *et que la somme de son ordre et de son degré soit inférieure à* $9N^2$;

S *est, ou l'unité, ou un produit de facteurs dont chacun est l'une des formes du système, ou l'un de leurs covariants du second degré, tel que* $(ab)^{\mu} a_x^{p-\mu} b_x^{q-\mu}$, *d'ordre au moins égal à* 2.

T *est, ou l'unité, ou un produit d'invariants dont chacun a son degré inférieur à* $7N - 5$.

18. Le théorème est évident si $N = 1$. En effet, des formes données $a, b, c, \ldots$, qui sont toutes linéaires, le procédé du n° **1** permettra de déduire les formes auxiliaires $\varphi = (ab)$, $\varphi_1 = (ac), \ldots$ d'ordre zéro. Or on sait que tout covariant du système est une fonction entière de $a, b, c, \ldots, \varphi, \varphi_1, \ldots$; ce sera donc une fonction linéaire de produits S.

Le théorème est encore évident, quel que soit N, pour les covariants du premier degré, lesquels se réduisent aux formes $a, b, c, \ldots, f, g, \ldots, \varphi, \ldots$ du système.

19. Nous allons démontrer que le théorème est vrai pour les covariants de degré δ correspondant à une valeur déterminée de N s'il est vrai : 1° pour les covariants correspondant à de moindres valeurs de N; 2° pour les covariants correspondant à la valeur donnée de N, mais de degré $< \delta$.

Tout d'abord ce théorème aura lieu pour tout covariant (de degré δ) qui soit un produit de deux facteurs, dont l'un est de la forme S, ou de la forme T, ou plus généralement de la forme ST. Soient en effet S′ T′ ce facteur; S′T′.U le covariant considéré. U étant de degré moindre que le proposé sera une fonction linéaire de termes RST; le covariant proposé s'exprimera donc par des termes S_1T_1RST. Mais le produit SS_1 de deux facteurs de l'espèce S est évidemment de même espèce; de même le produit TT_1 est évidemment de l'espèce T; donc S_1T_1RST sera de l'espèce RST.

En second lieu, le théorème sera vrai pour tout covariant négligeable; car il est vrai par hypothèse pour tous les covariants de classe inférieure au moyen desquels on peut l'exprimer.

20. Cela posé, on sait que les covariants du système $a, b, c, \ldots$,

$f, g, \ldots, \varphi, \varphi_1, \ldots$ s'obtiennent en composant les produits PQ définis au nº **14** avec des covariants des formes $f, g, \ldots, \varphi, \varphi_1, \ldots$. L'ordre de ces dernières formes ne pouvant surpasser N_1, quantité moindre que N, le théorème sera applicable à leurs covariants, lesquels seront de la forme $R_1 S_1 T_1$, l'ordre O_1 de R_1 étant $< 2N_1^2 < \frac{9}{8}N^2$, et la somme de son ordre et de son degré D_1 étant $< 9N_1^2 < \frac{81}{16}N^2$.

Chacun des facteurs qui constituent le produit S_1 est du premier ou du second degré; d'ailleurs ce facteur est, ou l'une des formes f, $g, \ldots, \varphi, \ldots$ dont l'ordre $\leqq N_1$ ou un composé de deux de ces formes dont l'ordre sera $2N_1 - 2$ dans le cas le plus favorable où les deux formes seront d'ordre N_1 et où il n'existe qu'un seul déterminant dans le produit symbolique.

Donc cet ordre ne pourra surpasser le plus grand des deux nombres N_1, $2N_1 - 2$.

Enfin les invariants T_1 seront d'un degré $< 7N_1 - 5 < 7N - 5$.

21. Considérons d'autre part le produit PQ. Chacun des facteurs de Q a pour degré 1 ou 2; son ordre ω est $> N_1 \geqq 2$, mais il ne peut surpasser $2N - 2$.

Enfin P est de la forme

$$(ab)^{\mu}(bc)^{\nu}(cd)^{\mu'}(de)^{\nu'}\ldots a_x^{p-\mu}\ldots$$

où

$$\mu < \frac{5}{8}N, \quad \mu \leqq \frac{\mu}{2}, \quad \nu' \leqq \mu - \nu, \quad \ldots.$$

Si $N < 4$, on pourra supposer que P se réduit à l'unité. En effet, on aura, en vertu des inégalités précédentes, $\mu = 1, \nu = 0$. Donc P est un covariant du second degré, qu'on pourra réunir aux facteurs analogues que contient le produit Q.

Soit au contraire $N \geqq 4$.

Les nombres $\mu, \mu', \ldots$ formant une suite décroissante, leur nombre ne peut surpasser μ : le nombre D des symboles qui figurent dans P sera donc $\leqq 2\mu < \frac{5}{4}N$.

Quant à l'ordre O de ce covariant, il sera égal à

$$\begin{aligned} &2\mu N - 2[\mu + 1 + (\mu - 1) + 1 + (\mu - 2) + \ldots] \\ &= 2\mu N - \mu(\mu + 1) - 2(\mu - 1) \end{aligned}$$

dans le cas le plus favorable, où l'on pose $\nu = 1$, $\mu' = \mu - 1$, $\nu' = 1$, $\mu'' = \mu - 2$, ..., et où $a, b, c, \ldots$ représentent des formes d'ordre N.

Cette expression serait maximum pour $\mu = \frac{2N-3}{2}$, valeur non inférieure à la limite $\frac{5}{8}N$ du nombre μ.

La limite supérieure de O s'obtiendra donc en posant $\mu = \frac{5}{8}$, ce qui donnera

$$O < \tfrac{55}{64}N^2 - \tfrac{15}{8}N + 2$$

et pour la somme de l'ordre et du degré de P

$$O + D < \tfrac{55}{64}N^2 - \tfrac{5}{8}N + 2.$$

N étant > 3, on aura $\frac{5}{8}N > 2$, et par suite

$$O + D < \tfrac{55}{64}N^2, \quad O < \tfrac{55}{64}N^2.$$

Cette limite est encore applicable au cas où N serait $\overline{\overline{<}} 3$, car, P étant égal à l'unité, on aura $O = 0$, $D = 0$.

22. Ces préliminaires posés, nous avons à établir que tout composé tel que

$$[PQ, \; R_1S_1T_1]^\lambda$$

est linéairement exprimable par des termes de la forme RST.

Cette proposition sera vraie si T_1 diffère de l'unité; car le composé est un produit de deux facteurs $[PQ, \; R_1S_1]^\lambda$ et T_1, dont le dernier est évidemment de l'espèce T.

Il ne reste donc à considérer que le cas où $T_1 = 1$.

La proposition est encore évidente si $\lambda = 0$; car le composé se réduit au produit $PQ.R_1S_1 = PR_1.QS_1$.

Or PR_1 est un covariant de l'espèce R, car son ordre $O + O_1$ est inférieur à $\frac{55}{64}N^2 + \frac{9}{8}N^2 < 2N^2$. D'autre part, la somme

$$O + D + O_1 + D_1$$

de son ordre et de son degré est inférieure à $\frac{55}{64}N^2 + \frac{81}{16}N^2 < 9N^2$. D'ailleurs QS_1 est évidemment de l'espèce S.

23. Soit donc $T_1 = 1$, et posons, pour abréger,

$$[PQ, \; R_1S_1]^\lambda = U.$$

Nous allons démontrer que le théorème est vrai pour U, s'il l'est pour les composés analogues où l'ordre de la composition est inférieur à λ.

Si le théorème est vrai pour un des termes du composé U, il sera vrai pour U; en effet, U s'exprime au moyen de ce terme et de composés $[A, B]^{\lambda'}$, où $\lambda' < \lambda$, A étant un covariant des formes a, b, c, et B un covariant des formes $f, g, \ldots, \varphi, \varphi_1, \ldots$.

Or B peut s'exprimer, par hypothèse, par des termes de l'espèce $R_1 S_1 T_1$. D'autre part, A s'exprime par des termes négligeables et des termes de l'espèce PQ.

Mais si l'on compose un terme négligeable avec un terme $R_1 S_1 T_1$, on obtiendra un covariant négligeable, auquel le théorème s'applique, par hypothèse. Il s'applique également aux composés des termes PQ avec les termes $R_1 S_1 T_1$, lorsque l'ordre λ' de la composition est $< \lambda$.

Tout revient donc à prouver que le théorème est vrai pour un terme V choisi arbitrairement dans U.

Désignons par O, Ω, O_1, Ω_1 les ordres respectifs des covariants P, Q, R_1, S_1; par D, Δ, D_1, Δ_1 leurs degrés. On aura

$$D < \tfrac{5}{4} N,$$
$$O < \tfrac{55}{64} N^2, \qquad O_1 < 2 N_1^2 < \tfrac{9}{8} N^2,$$
$$O + D < \tfrac{55}{64} N^2, \quad O_1 + D_1 < 9 N_1^2 < \tfrac{81}{16} N^2.$$

On aura en outre

$$\Omega \geq \Delta, \quad \Omega_1 \geq \Delta_1;$$

car Q et S_1 sont des produits de facteurs dont chacun a son ordre au moins égal à son degré. En effet, les facteurs de Q ont pour degré 1 ou 2, et leur ordre est $> N_1 - 2$. Ceux de S_1 ont également pour degré 1 ou 2, et leur ordre est au moins égal à leur degré, d'après l'énoncé du théorème.

Soient d'ailleurs O' et D' l'ordre et le degré de V. On aura

$$O' = O + \Omega + O_1 + \Omega_1 - 2\lambda,$$
$$O' + D' = O + \Omega + O + \Omega - 2\lambda + D + \Delta + D_1 + \Delta_1.$$

24. Divers cas seront à distinguer ici :

Premier cas. — Q et S_1 se réduisent à l'unité. On aura

$$\Omega = \Delta = \Omega_1 = \Delta_1 = 0,$$
$$O' = O + O_1 - 2\lambda < \tfrac{55}{64} N^2 + \tfrac{9}{8} N^2 < 2N^2,$$
$$O' + D' = O + O_1 - 2\lambda + D + D_1 < \tfrac{55}{64} N^2 + \tfrac{81}{16} N^2 < 9N^2$$

Donc, de quelque manière qu'on choisisse le terme V, il sera de l'espèce R.

25. *Deuxième cas.* — S_1 se réduit à l'unité, Q étant différent de l'unité. On aura $\Omega_1 = \Delta_1 = 0$.

Soient A l'un des facteurs de Q, ω son ordre, lequel est $\leqq 2N - 2$ et $\leqq \Omega$. Si $\lambda \leqq O + \Omega - \omega$, on pourra choisir le terme V de telle sorte que la composition y porte exclusivement sur les facteurs du covariant PQ autres que A, dont l'ordre total est $O + \Omega - \omega$. V contenant en facteur le covariant A, qui est de la forme S, le théorème sera établi.

Si $\lambda > O + \Omega - \omega$, on aura

$$\begin{aligned} O' &< O + \Omega + O_1 - 2(O + \Omega - \omega) \\ &< O_1 + \omega - (\Omega - \omega) - O < \tfrac{9}{8} N^2 + 2N - 2 < 2N^2, \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} O' + D' &< O + \Omega + O_1 - 2(O + \Omega - \omega) + D + \Delta + D_1 \\ &< (O_1 + D_1) + D + 2\omega - O - (\Omega - \Delta) \\ &< \tfrac{81}{16} N^2 + \tfrac{5}{4} N + 2(2N - 2) < 9N^2. \end{aligned}$$

Donc V sera de l'espèce R.

26. *Troisième cas.* — Q se réduit à l'unité, S_1 différant de l'unité. On aura $\Omega = \Delta = 0$.

Soit B l'un des facteurs de S_1 ; ω_1 son ordre, lequel sera $\leqq \Omega_1$, et ne pourra surpasser le plus grand des deux nombres N_1, $2N_1 - 2$.

Si $\lambda \leqq O_1 + \Omega_1 - \omega_1$, on pourra choisir le terme V de telle sorte que la composition porte exclusivement sur les facteurs du produit RS autres que B. V contenant B en facteur, le théorème sera établi.

Si $\lambda > O_1 + \Omega_1 - \omega_1$, on aura

$$O' < O + O_1 + \Omega_1 - 2(O_1 + \Omega_1 - \omega_1)$$
$$< O + \omega_1 - (\Omega_1 - \omega_1) - O_1 < \tfrac{55}{64} N^2 + \omega_1 < 2N^2,$$

$$O' + D' < O + O_1 + \Omega_1 - 2(O_1 + \Omega_1 - \omega_1) + D + D_1 + \Delta_1$$
$$< (O + D) + D_1 + 2\omega_1 - O_1 - (O_1 - \Delta_1)$$
$$< \tfrac{55}{64} N^2 + \tfrac{81}{16} N^2 + 2\omega_1 < 9N^2.$$

Donc V sera de l'espèce R.

27. *Quatrième cas.* — Q et S_1 diffèrent de l'unité.

Soient $A, A_1, A_2, \ldots, A_m$ et $B, B_1, \ldots, B_n$ les facteurs dont le produit forme respectivement Q et S_1; soient ω l'ordre de A, ω_1 celui de B. On verra, comme dans les deux cas précédents, que le théorème est vrai si λ ne surpasse pas chacun des deux nombres $O + \Omega - \omega$ et

$$O_1 + \Omega_1 - \omega_1.$$

Supposons donc λ plus grand que ces deux nombres, et *a fortiori* $\lambda > \Omega - \omega$ et $> \Omega_1 - \omega_1$.

Soient ρ le plus élevé des ordres des facteurs $A_1, A_2, \ldots, A_m$; ρ_1 le plus élevé des ordres des facteurs $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Nous allons démontrer que le théorème est vrai si l'on a à la fois $m \gtreqless \rho_1 - 1$, $n \gtreqless \rho - 1$.

Admettons, en effet, que ces deux inégalités soient satisfaites, et considérons les produits successifs

$$Q = AA_1 \ldots A_{\rho_1}, \quad Q_1 = A_1 \ldots A_{\rho_1}, \quad \ldots, \quad Q_{\rho_1} = A_{\rho_1}.$$

Leurs ordres respectifs $\mu, \mu_1, \ldots \mu_{\rho_1}$ forment une suite d'entiers décroissante où la différence entre deux termes consécutifs ne surpasse pas ρ, et dont le dernier terme ne surpasse pas ρ. Considérons de même les produits

$$s = BB_1 \ldots B_\rho, \quad s_1 = B_1 \ldots B_\rho, \quad \ldots, \quad s_\rho = B_\rho.$$

Leurs ordres $\nu, \nu_1, \ldots, \nu_\rho$ forment une suite d'entiers décroissants, où la différence de deux termes consécutifs ne surpasse pas ρ_1, et dont le premier terme est au moins égal à $\rho + 1$, nombre des facteurs B, $B_1, \ldots, B_\rho$.

Supposons, pour fixer les idées, $\nu \leqq \mu$; on aura *a fortiori* $\nu_1 < \mu$, $\nu_2 < \mu$, ...

Soit en général μ_{ν_i} celui des termes de la suite $\mu, \mu_1, \ldots \mu_\rho$ qui est égal ou immédiatement supérieur à ν_i; les ρ différences $\mu_{\nu_1} - \nu_1, \ldots, \mu_{\nu_i} - \nu_i, \ldots$ sont des entiers $< \rho$. En effet, on a par hypothèse

$$\nu_i > \mu_{\nu_i+1},$$

d'où

$$\mu_{\nu_i} - \nu_i < \mu_{\nu_i} - \mu_{\nu_i+1} < \rho.$$

Donc l'une de ces différences est nulle, ou deux d'entre elles sont égales.

Si l'on a $\mu_{\nu_i} - \nu_i = 0$, les deux produits

$$Q_{\nu_i} = A_{\nu_i} \ldots A_{\rho_1}, \quad \text{et} \quad s_i = B_i \ldots B_\rho$$

auront le n ème ordre.

Si l'on a $\mu_{\nu_i} - \nu_i = \mu_{\nu_k} - \nu_k$, d'où $\mu_{\nu_i} - \mu_{\nu_k} = \nu_i - \nu_k$, les deux produits

$$A_{\nu_i} \ldots A_{\nu_k} \quad \text{et} \quad B_i \ldots B_k$$

auront le même ordre

Cet ordre π est d'ailleurs au plus égal à $\Omega_1 - \omega_1$. Car S_1 a pour ordre Ω_1 et le produit $B_i \ldots B_\rho$ ou $B_i \ldots B_k$ ne contient qu'une partie des facteurs de S_1; il y manque notamment le facteur B, d'ordre ω_1. Ayant d'ailleurs $\lambda > \Omega_1 - \omega_1$, on aura $\lambda > \pi$.

Cela posé, nous pourrons prendre pour V un terme du composé où les π facteurs linéaires du produit

$$A_{\nu_i} \ldots A_{\nu_k} \quad \text{ou} \quad A_{\nu_i} \ldots A_{\rho_1}$$

soient composés avec ceux du produit $B_i \ldots B_k$ ou $B_i \ldots B_\rho$. Cette composition donnera comme facteur dans V un invariant I, dont le degré sera la somme des degrés des deux produits considérés.

Or le premier de ces produits contient au plus $\rho_1 + 1$ facteurs; le second en contient au plus ρ. Chacun de ces facteurs est du degré 1 ou 2. Donc le degré δ de l'invariant sera $\leqq 2(\rho + \rho_1 + 1)$.

On a d'ailleurs $\rho \leqq 2N - 2$; quant à ρ_1 il ne peut surpasser le plus élevé des deux nombres N_1, $2N_1 - 2$.

Si donc on a $N > 2$, d'où $N_1 > 1$, on aura

$$\delta \leqq 2(2N - 2 + 2N_1 - 2 + 1) \leqq 7N - 6.$$

Si $N = 2$, d'où $N_1 = 1$,

$$\delta \leqq 2(2 + 1 + 1) = 7N - 6.$$

Donc, dans tous les cas, $\delta < 7N - 5$. L'invariant I sera donc de l'espèce T, et, V contenant I en facteur, le théorème lui sera applicable.

28. Il ne reste plus à examiner que le cas où l'on a l'une des deux inégalités

$$m \leqq \rho_1 - 1, \quad n \leqq \rho - 1.$$

1° Soit d'abord $m \leqq \rho_1 - 1$. Le produit

$$Q = AA_1 \ldots A_m$$

contenant au plus ρ_1 facteurs dont l'ordre ne surpasse pas ρ et dont le degré ne surpasse pas 2, on aura

$$\Omega \leqq \rho\rho_1, \quad \Delta \leqq 2\rho_1.$$

D'ailleurs,

$$\lambda > O_1 + \Omega_1 - \omega_1 > O_1 + \Omega_1 - \rho_1,$$
$$\lambda > O + \Omega - \omega > O + \Omega - \rho,$$
$$O' = O + \Omega + O_1 + \Omega_1 - 2\lambda < \rho + \rho_1.$$

Si $N = 2$, on aura

$$\rho \leqq 2N - 2 \leqq 2, \quad \rho_1 \leqq 1, \quad O' < 3 < 2N^2.$$

Si $N > 2$, on aura

$$\rho \leqq 2N - 2, \quad \rho_1 \leqq 2N_1 - 2 \leqq \tfrac{3}{2}N - 2, \quad O' \leqq \tfrac{7}{2}N - 4 < 2N^2.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} O' + D' &= O + \Omega + O_1 + \Omega_1 - 2\lambda + D + \Delta + D_1 + \Delta_1 \\ &< O + \Omega + O_1 + \Omega_1 - 2(O_1 + \Omega_1 - \rho_1) + D + \Delta + D_1 + \Delta_1 \\ &< (O + D) + (\Omega + 2\rho_1 + \Delta) + D_1 - (\Omega_1 - \Delta_1) - O_1 \\ &< \tfrac{55}{64} N^2 + (\rho + 4)\rho_1 + \tfrac{81}{16} N^2. \end{aligned}$$

Mais si $N > 2$, on a

$$\rho \leqq 2N - 2, \quad \rho_1 \leqq 2N_1 - 2,$$
$$(\rho + 4)\rho_1 \leqq (2N + 2)(2N_1 - 2) < 4NN_1 < 3N^2,$$

inégalité qui subsistera encore si $N = 2$, d'où $\rho \leqq 2$, $\rho_1 \leqq 1$.

On en conclut

$$O' + D' < N^2\left(\tfrac{55}{64} + 3 + \tfrac{81}{16}\right) < 9N^2.$$

Donc V sera de l'espèce R.

2° Soit enfin $n \leqq \rho - 1$. On trouvera de même

$$\Omega_1 \leqq \rho\rho_1, \quad \Delta_1 \leqq 2\rho_1, \quad O' < \rho + \rho_1 < 2N^2,$$
$$O' + D' < (O_1 + D_1) + (\Omega_1 + 2\rho + \Delta_1) + D - (\Omega - \Delta) - O,$$
$$< \tfrac{81}{16} N^2 + \rho(\rho_1 + 4) + \tfrac{5}{4} N < 9N^2.$$

Donc ici encore V sera de l'espèce R.

§ V.

29. Il résulte de l'analyse précédente que les covariants d'un système quelconque de formes dont les degrés ne surpassent pas N s'expriment linéairement par des produits tels que $RS_1S_2 \ldots, T_1T_2, \ldots$, où R contient moins de $9N^2$ symboles, $S_1, S_2, \ldots$ n'en contenant pas plus de deux, et $T_1, T_2, \ldots$ en contenant moins de $7N - 5$. Mais, pour arriver à ce résultat, il a fallu adjoindre aux formes données $a, b, c, \ldots, f, g, \ldots$ des formes auxiliaires $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi', \varphi'_1, \ldots$.

Pour connaître le degré des facteurs $R, S_1, S_2, \ldots, T_1, T_2, \ldots$, relativement aux coefficients des formes primitives $a, b, c, \ldots, f, g, \ldots$, il est nécessaire de se rendre compte du degré des formes auxiliaires $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi', \varphi'_1, \ldots$.

Les premières formes auxiliaires φ, $\varphi_1, \ldots$ sont des covariants du degré 3 au plus et d'ordre $\overline{\gtrless}$ N_1 des formes $a, b, c, \ldots$ du système dont l'ordre surpasse N_1.

Puis on aura une seconde classe de formes auxiliaires $\varphi', \varphi'_1, \ldots$, en prenant les covariants de degré 2 ou 3 et d'ordre $\overline{\gtrless} N_2 = E(\frac{3}{4} N_1)$ de celles des formes $f, g, \ldots, \varphi, \varphi_1, \ldots$ dont l'ordre surpasse N_2.

Ces nouvelles formes pouvant être, dans le cas le plus défavorable, du troisième degré par rapport aux coefficients de $\varphi, \varphi_1, \ldots$, qui sont eux-mêmes du troisième degré par rapport à ceux des formes primitives, pourront être de degré 3^2.

On obtiendra ensuite de nouvelles formes auxiliaires $\varphi'', \varphi''_1, \ldots$, d'ordre $\overline{\gtrless} N_3 = E(\frac{3}{4} N_2)$ et dont le degré pourra être 3^3 dans le cas le plus défavorable.

En continuant ainsi, on arrivera à un nombre N_ρ, qui ne surpasse pas 4. Supposons $N_\rho = 4$, ce qui est le cas le plus défavorable. Les nouvelles formes φ^ρ, φ'^ρ que l'on introduira à ce moment pourront avoir pour degré $3^{\rho+1}$; et leur ordre ne surpassera pas 2. Car si $N_\rho = 4$, leur ordre ne peut surpasser $N_{\rho+1} = 3$. D'ailleurs ce sont des covariants d'un système de formes d'ordre 4; leur ordre est donc un nombre pair : donc il ne peut surpasser $2 = N_{\rho+2}$.

Les formes $\varphi^{\rho+1}$, $\varphi'^{\rho+1}$, $\ldots$, qu'on introduira ensuite, étant des covariants des formes du système ou des formes précédemment adjointes dont l'ordre ne surpasse pas $N_{\rho+1}$, mais est supérieur à $N_{\rho+2} = 2$, ne contiendront pas les symboles des formes $\varphi^\rho, \varphi'^\rho, \ldots$, mais seulement ceux des formes précédentes, dont le degré ne surpasse pas 3^ρ. Donc le degré de $\varphi^{\rho+1}, \varphi'^{\rho+1}, \ldots$ ne peut surpasser $3^{\rho+1}$.

On aura ensuite à introduire des formes $\varphi^{\rho+2}, \varphi'^{\rho+2}, \ldots$, covariants de celles des formes précédentes dont l'ordre est $\overline{\gtrless} N_{\rho+2}$, mais $> N_{\rho+3}$. Le degré de ces nouvelles formes ne surpassera pas $3^{\rho+2}$ et leur ordre ne surpassera pas $N_{\rho+3}$ qui est égal à 1. Mais $N_{\rho+2} = 2$, $N_{\rho+3} = 1$; donc $\varphi^{\rho+2}, \varphi'^{\rho+2}, \ldots$ étant des covariants de formes d'ordre 2, leur ordre sera pair; donc il se réduira à zéro et $\varphi^{\rho+2}, \varphi'^{\rho+2}, \ldots$ seront des invariants.

Enfin nous aurons à introduire les formes $\varphi^{\rho+3}, \varphi'^{\rho+3}, \ldots$, provenant de la combinaison des formes linéaires du système $a, b, c, \ldots, f, g, \ldots$ $\varphi, \varphi', \ldots, \varphi^{\rho+1}, \varphi'^{\rho+1}, \ldots$. Ces nouvelles formes seront des invariants

contenant deux symboles dont chacun représente une forme de degré $3^{\rho+1}$ au plus. Donc $\varphi^{\rho+3}$, $\varphi'^{\rho+3}$, ... seront de degré $2.3^{\rho+1}$ au plus.

Les quantités $\varphi^{\rho+2}$, $\varphi'^{\rho+2}$, ...; $\varphi^{\rho+3}$, $\varphi'^{\rho+3}$, ... étant des invariants, leurs symboles ne pourront pas figurer associés avec d'autres dans l'expression des covariants R, S_1, S_2, ..., T_1, T_2, ...

Donc les symboles, en nombre $< 9N^2 - O$, que R contient représenteront des formes de degré $3^{\rho+1}$ au plus. Donc le degré de R sera inférieur à $(9N^2 - O)3^{\rho+1}$.

De même, les covariants à deux symboles S_1, S_2, ... seront d'un degré non supérieur à $2.3^{\rho+1}$.

De même encore des invariants T_1, T_2, ..., qui contiennent plus d'un symbole auront leur degré inférieur à $(7N - 5)3^{\rho+1}$.

Quant à ceux qui ne contiennent qu'un symbole, leur degré ne pourra surpasser $3^{\rho+2}$, quantité $< (7N - 5)3^{\rho+1}$, si $N > 2$.

Il sera aisé de calculer le nombre ρ pour une valeur quelconque de N en formant la suite des nombres N, N_1, N_2, ... On peut d'ailleurs lui assigner une limite supérieure. On a en effet

$$N_1 \leqq \tfrac{3}{4}N, \quad N_2 \leqq \tfrac{3}{4}N_1, \quad \ldots, \quad N_{\rho-1} \leqq \tfrac{3}{4}N_{\rho-2}, \quad 4 < N_{\rho-1},$$

d'où

$$4 < \left(\tfrac{3}{4}\right)^{\rho-1} N,$$

$$\rho - 1 < \frac{\log \frac{N}{4}}{\log \frac{4}{3}}.$$

§ VI.

30. Les limites

$$O < 2N^2, \quad D < (9N^2 - O)3^{\rho+1},$$

trouvées plus haut pour l'ordre et le degré des covariants indépendants d'un système de formes d'ordre $\leqq N$, se recommandent par leur simplicité; mais elles sont encore trop élevées et pourraient aisément être resserrées par une analyse plus précise.

Occupons-nous, par exemple, de déterminer une nouvelle limite pour O.

La méthode que nous allons suivre dans ce but présente la plus grande analogie avec celle que nous venons d'exposer dans les paragraphes précédents. Nous pourrons donc abréger un peu les démonstrations.

51. Soient a, b, $c, \ldots$, e, $f, \ldots$ un système de formes, dont l'ordre ne dépasse pas N. Formons les covariants A, B, ... de ce système dont l'ordre ne dépasse pas N et adjoignons-les au système primitif. Tout covariant du système proposé sera un covariant du système a, b, $c, \ldots$, e, $f, \ldots$, A, B, ..., et pourra être exprimé de diverses manières par les symboles de ces diverses formes.

Nous considérerons comme négligeable tout covariant qui peut s'exprimer par d'autres covariants contenant moins de symboles.

52. Soient p, q, $r, \ldots$ les ordres respectifs des formes a, b, $c, \ldots$, e, $f, \ldots$, A, B, ... Tout produit symbolique P qui contient en facteur $(ab)^m$ sera négligeable, si $p + q - 2m \leqq \mathrm{N}$; car il s'exprime par les composés de covariants $(ab)^{m'} a_x^{p-m'} b_x^{q-m'}$ (où $m' \geqq m$) avec des covariants contenant les autres symboles de P. Or, chacun des premiers covariants, ayant pour ordre $p + q - 2m' \leqq \mathrm{N}$, est une des formes auxiliaires A, B, ... Introduisant le symbole de cette forme à la place des deux symboles a, b, on aura diminué le nombre des symboles.

En particulier, tout covariant qui contient un facteur $(ab)^m$ sera négligeable, si $m \geqq \frac{1}{2}\mathrm{N}$; car, p et q étant $\leqq \mathrm{N}$, $p + q - 2m$ sera $\leqq \mathrm{N}$.

53. Considérons maintenant un covariant K du troisième degré tel que

$$(ab)^\gamma (ca)^\beta (bc)^\alpha a_x^{p-\gamma-\beta} b_x^{q-\alpha-\gamma} c_x^{r-\alpha-\beta}.$$

Posons, pour abréger, $\alpha + \beta + \gamma = n$.

Si p, q, r sont tous $\geqq n$, posons

$$(ab)^{n-\nu} (bc)^\nu a_x^{p-n+\nu} b_x^{q-n} c_x^{r-\nu} = \mathrm{C}_{abc}^\nu;$$

le covariant K pourra s'exprimer (nº **7**) en fonction linéaire de ceux des covariants

$$\mathrm{C}_{abc}^\nu, \quad \mathrm{C}_{bca}^\nu, \quad \mathrm{C}_{cab}^\nu,$$

où $\nu \leqq \frac{n}{3}$.

Dans le cas contraire, K sera négligeable. En effet, si deux des quantités p, q, r, par exemple q et r, sont $\overline{\gtrless} n$, l'ordre de K, qui est $p+q+r-2n$, sera $\overline{\gtrless} p \overline{\gtrless} N$. Donc K est l'une des formes auxiliaires A, B, ..., et pourra s'exprimer par un seul symbole au lieu de trois.

Soit enfin $p > n$, $q > n$, mais $r < n = n - \rho$; K est le produit de $(ab)^\rho$ par l'expression

$$P = (ab)^{\gamma-\rho}(ca)^\beta(bc)^\alpha a_x^{p-\gamma-\beta} b_x^{q-\alpha-\gamma} c_x^{r-\alpha-\beta},$$

où la somme des exposants des déterminants est $n-\rho$, nombre non supérieur aux quantités $p-\rho$, $q-\rho$, r qui représentent respectivement le degré de l'expression en a, b, c.

Posant

$$(ab)^{n-\rho-\nu}(bc)^\nu a_x^{p-n+\nu} b_x^{q-n} c_x^{r-\nu} = C_{abc}^\nu,$$

on sait (n° **7**) que P pourra s'exprimer linéairement en fonction de $n-\rho+1$ produits symboliques

$$C_{bca}^0, \ldots, C_{bca}^k; \; C_{cab}^0, \ldots, C_{cab}^l;$$

k et l étant deux entiers quelconques tels que l'on ait

$$k+l+2 = n-\rho+1 = r+1.$$

Multipliant ces produits symboliques par $(ab)^\rho$, on obtiendra les divers termes au moyen desquels k peut être exprimé.

Prenons pour k le plus grand nombre contenu dans $\frac{r}{2}$. On aura

$$l = r-1-E\left(\frac{r}{2}\right) \overline{\gtrless} E\left(\frac{r}{2}\right).$$

Cela posé, chacun des termes de K sera négligeable. En effet, considérons l'un de ces termes, tel que

$$(ab)^\rho C_{bca}^\nu \quad (\text{où } \nu \overline{\gtrless} k.)$$

Ce terme, contenant en facteur le déterminant $(bc)^{n-\rho-\nu}$, sera négli-

geable, si l'on a $q + r - 2(n - \rho - \nu) \overline{\overline{<}} N$. Or on a

$$n - \rho = r, \quad \nu \overline{\overline{<}} k \overline{\overline{<}} \frac{r}{2},$$

d'où

$$q + r - 2(n - \rho - \nu) \overline{\overline{<}} q \overline{\overline{<}} N.$$

34. Nous dirons, comme au n° **4**, qu'un produit symbolique est de la catégorie μ, s'il contient en facteur un déterminant élevé à la puissance μ; et nous considérerons comme réductible tout produit symbolique exprimable au moyen de termes négligeables ou d'une catégorie plus élevée.

Cela posé, on trouvera, par des raisonnements semblables à ceux des n^{os} **12** à **16** :

1° Que tout produit symbolique de catégorie γ est réductible, s'il est divisible par $(ab)^\gamma (ca)^\beta (bc)^\alpha$, $\alpha + \beta$ étant $> \frac{1}{2}\gamma$ ou $\alpha + \beta + \gamma$ étant plus grand que l'un des nombres p, q, r;

2° Qu'un produit à quatre symboles

$$(ab)^\gamma (ca)^\beta (bc)^\alpha (ad)^\delta (bd)^\varepsilon (cd)^\zeta a_x^{p-\gamma-\beta-\delta} \ldots$$

est réductible si le plus grand des exposants γ, β, α, δ, ε, ζ est moindre que la somme des cinq autres;

3° Qu'un covariant quelconque K peut s'exprimer linéairement par des termes négligeables et par des produits PQ, où Q représente un produit de formes prises chacune dans la suite des formes a, b, c, ..., A, B, ... ou dans la suite de leurs covariants du second degré; P représentant d'autre part un produit formé avec les symboles a, b, c, ..., A, B, ... et de l'espèce suivante :

$$(ab)^\mu (bc)^\nu (cd)^{\mu_1} (de)^{\nu_1} \ldots a_x^{p-\mu} \ldots,$$

où

$$\mu < \tfrac{1}{2} N, \quad \nu \overline{\overline{<}} \tfrac{1}{2}\mu, \quad \mu_1 \overline{\overline{<}} \mu - \nu, \quad \nu_1 \overline{\overline{<}} \tfrac{1}{2}\mu_1, \quad \ldots.$$

Les termes négligeables qui figurent dans cette expression de K pouvant être traités comme K l'a été lui-même, on voit que tout covariant K s'exprime linéairement par des produits PQ.

35. Cela posé, les facteurs dont se compose le produit Q, étant des formes d'ordre $\overline{\leqq}$ N ou des covariants du second degré de ces formes, l'ordre de chacun d'eux sera au plus égal au plus grand des deux nombres N ou $2N-2$.

Reste à considérer le facteur P. Appliquant à ce produit symbolique les raisonnements exposés au § VII de notre Mémoire de 1876, on trouvera que P s'exprime (sauf des termes négligeables) en fonction entière de produits analogues Π, dans lesquels le nombre δ des symboles, la somme $\mu+\nu+\mu_1+\nu_1+\ldots=S$ des exposants des déterminants et le premier μ de ces exposants sont liés par les relations

$$S \overline{\leqq} \varphi(\delta), \quad \mu \overline{\geqq} f(\delta),$$

f et φ désignant les deux fonctions numériques définies par les équations

$$f(1)=0, \quad f(2)=1, \quad f(3)=2,$$
$$f(2i+3)=f(2i+2)+2E\left[\frac{f(i+3)}{4}\right],$$
$$f(2i+2)=f(2i+1)+2E\left[\frac{f(i+2)+2}{4}\right],$$
$$\varphi(1)=0, \quad \varphi(2)=1, \quad \varphi(3)=3,$$
$$\varphi(i)=\varphi(i-1)+f(i).$$

Cela posé, les δ formes dont les symboles figurent dans l'expression d'un produit Π étant au plus d'ordre N, l'ordre de Π sera

$$\overline{\leqq} N\delta-2S \overline{\leqq} N\delta-2\varphi(\delta).$$

D'ailleurs δ est lui-même limité par la condition

$$\frac{N}{2}>\mu>f(\delta).$$

Pour avoir la limite de l'ordre de Π, il faudra donc déterminer les valeurs de δ qui satisfont à cette inégalité et les substituer dans l'expression $N\delta-2\varphi(\delta)$. Le plus grand des résultats obtenus sera la limite cherchée.

On s'assurera aisément que ce résultat maximum correspond à la plus grande des valeurs que l'on peut assigner à δ.

Nous pouvons donc énoncer ce théorème :

Théorème. — *Tout covariant d'un système de formes d'ordre* $< N$ *peut s'exprimer en fonction entière de covariants dont l'ordre* O *ne surpasse pas la plus grande des limites suivantes :*

$$N, \quad 2N-2, \quad N\delta - 2\varphi(\delta),$$

δ *étant le plus grand entier qui satisfasse à l'inégalité*

$$f(\delta) < \frac{N}{2}.$$

Le calcul des fonctions f, φ pouvant s'effectuer de proche en proche avec une grande facilité, on n'aura aucune peine à déterminer les limites ainsi définies. On trouvera ainsi, pour

$$N = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \ldots,$$

les limites suivantes :

$$1, 2, 4, 6, 9, 12, 15, 18, 22, 26, \ldots$$

Mémoire sur la théorie des perturbations des mouvements des comètes;

PAR M. EMILE MATHIEU.

Le problème de Képler consiste à exprimer, dans le mouvement elliptique d'une planète, le temps t, le rayon vecteur r et l'anomalie vraie Φ au moyen d'une même variable, pour laquelle on choisit l'anomalie excentrique. De plus, quand l'excentricité de l'orbite de la planète est très-petite, on déduit de ces formules des séries très-convergentes qui expriment les coordonnées r, Φ au moyen du temps. Lorsque l'excentricité de l'orbite est très-voisine de l'unité, ce qui a lieu pour les comètes, ces séries ne sont plus convergentes. Lagrange et Laplace, pour étudier les mouvements des comètes, partent cependant encore des formules qui expriment t, r, Φ au moyen de l'anomalie excentrique (*OEuvres de Lagrange*, t. VI, p. 403; *Mécanique céleste*, seconde Partie, Livre IX); mais ils ne parviennent à calculer les éléments variables de leurs orbites que par des quadratures mécaniques.

Depuis, on a cherché à diviser l'orbite d'une comète en plusieurs arcs, de manière à pouvoir calculer analytiquement le mouvement sur chacune de ces parties de l'orbite, en adoptant une variable auxiliaire qui change d'un de ces arcs à l'autre. On peut alors intégrer les équations du mouvement à l'aide de séries et l'on obtient des formules variables d'un arc à l'autre pour représenter le mouvement. Mais cette méthode conduit à des calculs très-laborieux et il y a un grand inconvénient à ne pas adopter une variable indépendante unique.

Afin de perfectionner la théorie des perturbations éprouvées par les comètes, je me suis proposé de trouver des séries qui expriment les coordonnées de la comète dans le plan de son orbite et le temps t au moyen d'une même variable et qui, lorsque l'excentricité est très-voisine de l'unité, soient très-convergentes dans toute l'étendue de l'orbite. De plus, de même que les formules connues pour les développements de r et Φ, dans la théorie des planètes, sont très-commodes pour étudier le mouvement troublé dans des orbites presque circulaires, il m'a fallu diriger mes efforts, pour que les formules nouvelles soient appropriées au calcul des perturbations d'un corps qui se meut dans une orbite extrêmement allongée

Sur les équations du mouvement elliptique.

1. Supposons un corps attiré par un centre fixe en raison inverse du carré de la distance et formons les équations de son mouvement rapportées au plan de l'orbite.

Désignons par m la masse du corps attiré, par l^2 l'attraction du centre fixe sur cette masse à l'unité de distance et par h la constante de l'équation des forces vives; représentons ensuite par r le rayon vecteur mené du centre d'attraction au corps m, et par Φ l'angle de r avec une droite fixe tracée dans le plan de l'orbite. Alors, en désignant par τ, b, b' trois constantes arbitraires, les intégrales du mouvement peuvent s'écrire

$$t+\tau=\int^r \frac{mr\,dr}{\sqrt{2ml^2r-b^2+2mhr^2}}, \tag{1}$$

$$\Phi=\int^r \frac{b\,dr}{r\sqrt{2ml^2r-b^2+2mhr^2}}+b'. \tag{2}$$

Supposons que l'orbite soit fermée et par conséquent elliptique; désignons alors par a le demi-grand axe de cette ellipse, par e son excentricité et par p son demi-paramètre; il conviendra de prendre pour limite des intégrales précédentes le minimum de r ou $a(1-e)$. Nous aurons ensuite

$$-\frac{l^2}{h}=2a,\quad \frac{b^2}{ml^2}=a(1-e^2)=p.$$

Sur la forme à donner aux équations du mouvement, lorsque l'excentricité est très-voisine de l'unité.

2. Si nous posons l'équation du second degré en r

$$2mhr^2 + 2ml^2r - b^2 = 0$$

ou

$$(3) \qquad r^2 - 2ar + ap = 0,$$

les racines représenteront les valeurs minimum et maximum du rayon vecteur r; désignons par c la valeur minimum. Alors, si e est très-voisin de l'unité ou $\frac{p}{a}$ très-petit, on pourra facilement développer c suivant les puissances de $\frac{p}{a}$ et l'on aura

$$c = \frac{p}{2} + \frac{p^2}{8a} + \frac{p^3}{16a^2} + \frac{5p^4}{128a^3} + \dots.$$

La quantité c étant racine de l'équation (3), la seconde racine est égale à $2a - c$, et nous avons par conséquent

$$2mhr^2 + 2ml^2r - b^2 = 2mh(r-c)(r-2a+c)$$
$$= \frac{ml^2}{a}(2a-c)(r-c)\left(1 - \frac{r}{2a-c}\right).$$

Nous allons transformer les seconds membres des équations (1) et (2). Nous avons d'abord

$$\int \frac{mr\,dr}{\sqrt{2ml^2r - b^2 + 2mhr^2}} = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{ma}{2a-c}} \int \frac{r\,dr}{\sqrt{(r-c)\left(1 - \frac{r}{2a-c}\right)}}.$$

Faisons

$$r = u^2 + c,$$

et nous aurons pour la valeur de cette intégrale

$$\frac{2}{l}\sqrt{\frac{ma}{2a-c}}\int\frac{(u^2+c)\,du}{\sqrt{1-\frac{u^2+c}{2a-c}}}$$
$$=\frac{2}{l}\sqrt{\frac{ma}{2a-c}}\int\left[u^2+c+\frac{1}{2}\frac{1}{2a-c}(u^2+c)^2\right.$$
$$\left.+\frac{1.3}{2.4}\frac{1}{(2a-c)^2}(u^2+c)^3+\ldots\right]du.$$

Remarquons ensuite que l'on a

$$\frac{b}{l\sqrt{\frac{m}{a}(2a-c)}}=\sqrt{\frac{pa}{2a-c}}=\sqrt{c},$$

puisque

$$pa=c(2a-c)=a^2(1-e^2):$$

nous obtenons ainsi pour l'intégrale renfermée dans l'équation (2)

$$\int\frac{b\,dr}{r\sqrt{2ml^2r-b^2+2mhr^2}}=2\sqrt{c}\int\frac{du}{(u^2+c)\sqrt{1-\frac{u^2+c}{2a-c}}}$$
$$=2\sqrt{c}\int\left[\frac{1}{u^2+c}+\frac{1}{2}\frac{1}{2a-c}+\frac{1.3}{2.4}\frac{u^2+c}{(2a-c)^2}\right.$$
$$\left.+\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{(u^2+c)^2}{(2a-c)^3}+\ldots\right]du.$$

Pour $u=0$, on a $r=c$ et t se réduit à $-\tau$, temps du passage de m au sommet le plus voisin du centre d'attraction. Supposons que l'on compte l'angle Φ à partir du rayon vecteur minimum, Φ représentera l'anomalie vraie et s'annulera pour $u=0$; la constante b' sera donc nulle aussi. D'après cela, les équations (1) et (2) sont remplacées par les suivantes :

$$t+\tau=\frac{2}{l}\sqrt{\frac{ma}{2a-c}}\int_0^u\left[u^2+c+\frac{1}{2}\frac{(u^2+c)^2}{2a-c}+\frac{1.3}{2.4}\frac{(u^2+c)^3}{(2a-c)^2}+\ldots\right]du,$$

$$\Phi=2\,\text{arc tang}\frac{u}{\sqrt{c}}+2\sqrt{c}\int_0^u\left[\frac{1}{2}\frac{1}{2a-c}+\frac{1.3}{2.4}\frac{u^2+c}{(2a-c)^2}+\ldots\right]du$$

Prenons pour la masse attirante la masse M du Soleil supposée d'abord fixe, et pour la masse attirée m celle d'une comète, nous aurons

$$l = \sqrt{\mathrm{M}m};$$

si nous représentons aussi par P_ν le polynome entier

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_\nu &= \int_0^u (u^2 + c)^\nu du \\ &= \frac{u^{2\nu+1}}{2\nu+1} + \frac{\nu}{2\nu-1} cu^{2\nu-1} + \frac{\nu(\nu-1)}{1.2(2\nu-3)} c^2 u^{2\nu-3} + \ldots + c^\nu u.\end{aligned}$$

nous aurons enfin pour les équations du mouvement

$$\begin{gathered} r = u^2 + c, \\ t + \tau = \frac{2}{\sqrt{\mathrm{M}}} \sqrt{\frac{a}{2a-c}} \left(\mathrm{P}_1 + \frac{1}{2} \frac{\mathrm{P}_2}{2a-c} + \frac{1.3}{2.4} \frac{\mathrm{P}_3}{(2a-c)^2} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \frac{\mathrm{P}_4}{(2a-c)^3} + \ldots \right), \\ \Phi = 2 \operatorname{arctang} \frac{u}{\sqrt{c}} + \frac{2\sqrt{c}}{2a-c} \left(\frac{1}{2} \mathrm{P}_0 + \frac{1.3}{2.4} \frac{\mathrm{P}_1}{2a-c} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \frac{\mathrm{P}_2}{(2a-c)^2} + \ldots \right). \end{gathered}$$

Au périhélie u s'annule et nous pouvons supposer que, lorsque t en croissant passe par $-\tau$, u passe du négatif au positif. Alors, sur la moitié de l'orbite renfermée entre les absides, u variera de $-\sqrt{2a-2c}$ à zéro et sur l'autre moitié entre zéro et $+\sqrt{2a-2c}$.

Les trois formules que nous venons d'obtenir sont très-propres à résoudre le problème dit *de Képler* pour des orbites extrêmement excentriques.

Sur l'expression de $t+\tau$.

5. Si nous ordonnons l'expression de $t+\tau$ par rapport aux puissances de la quantité c, qui est généralement très-petite par rapport à $2a$, et si nous posons, pour abréger,

$$\mathrm{A} = 2a - c,$$

nous avons

$$t + \tau = \frac{2}{\sqrt{\mathrm{M}}} \sqrt{\frac{a}{\mathrm{A}}} \left(\mathrm{T}_0 + \mathrm{T}_1 c + \mathrm{T}_2 \frac{c^2}{\mathrm{A}} + \mathrm{T}_3 \frac{c^3}{\mathrm{A}^2} + \ldots \right),$$

en faisant

$$T_0 = \frac{u^3}{3} + \frac{1}{2}\frac{1}{A}\frac{u^5}{5} + \frac{1.3}{2.4}\frac{1}{A^2}\frac{u^7}{7} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{1}{A^3}\frac{u^9}{9} + \ldots,$$

$$T_1 = u + \frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{u^3}{A} + \frac{1.3}{2.4}\frac{3}{5}\frac{u^5}{A^2} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{4}{7}\frac{u^7}{A^3} + \ldots,$$

$$T_2 = \frac{1}{2}\left(u + \frac{1.3}{2.4}3.2\frac{u^3}{3A} + \frac{1.3.5}{2.4.6}4.3\frac{u^5}{5A^2} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}5.4\frac{u^7}{7A^3} + \ldots\right),$$

$$T_3 = \frac{1}{2.3}\left(\frac{1.3}{2.4}3.2.1\,u + \frac{1.3.5}{2.4.6}4.3.2\frac{u^3}{3A} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}5.4.3\frac{u^5}{5A^2} + \ldots\right).$$

. . . .

Les séries qui donnent $T_0, T_1, T_2, \ldots$ sont peu convergentes dans la partie la plus éloignée de l'orbite; nous montrerons plus loin comment de ce développement de $t + \tau$ on peut en déduire un autre, formé de séries extrêmement convergentes à cette extrémité. Mais on pourra aussi, quand on ne jugera pas ces séries assez convergentes, les remplacer au moyen de l'interpolation par des polynômes entiers d'un nombre limité de termes; on pourra même remplacer utilement dans la pratique ces séries par des polynômes entiers impairs dans toute l'étendue de l'orbite, ou lorsque u varie depuis zéro jusqu'à $\sqrt{2a - 2c}$; ce qui n'empêchera pas d'avoir égard aux variations de $T_0, T_1, \ldots$, provenant des changements de a et c.

Mais, pour pouvoir faire cette substitution, il faudra d'abord sommer ces séries. Or, en les sommant, on trouve

$$T_0 = -\frac{Au}{2}\sqrt{1 - \frac{u^2}{A}} + \frac{A\sqrt{A}}{2}\arcsin\frac{u}{\sqrt{A}},$$

$$T_1 = \frac{1}{2}\frac{u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{A}}} + \frac{\sqrt{A}}{2}\arcsin\frac{u}{\sqrt{A}},$$

$$T_2 = \frac{u}{2}\left(1 - \frac{u^2}{A}\right)^{-\frac{3}{2}}\left(1 - \frac{3}{4}\frac{u^2}{A}\right),$$

$$T_3 = \frac{u}{24}\left(1 - \frac{u^2}{A}\right)^{-\frac{5}{2}}\left(9 - \frac{25}{2}\frac{u^2}{A} + 5\frac{u^4}{A^2}\right).$$

Avant de terminer ce numéro, faisons une remarque. Les différen-

tielles des éléments troublés seront de cette forme

$$dl = \left(\mathrm{M}\frac{d\mathrm{V}}{da} + \mathrm{N}\frac{d\mathrm{V}}{db} + \ldots\right) dt,$$

$l, a, b, \ldots$ étant les éléments de la comète, M, N,... des fonctions de ces éléments et V la fonction perturbatrice. A l'extrémité de l'orbite, les dérivées de V seront ordinairement très-petites; on voit donc qu'une petite erreur commise sur t ou dt en produira en général une, relativement beaucoup plus petite, sur la valeur du changement de l.

Calcul de $r\sin\Phi$ *et* $r\cos\Phi$.

4. La fonction perturbatrice ne contient de quantités variables relatives à la comète que Φ et r; de plus, elle ne contient l'angle Φ que par les expressions $r\sin\Phi$, $r\cos\Phi$; ce sont donc ces expressions plutôt que l'angle Φ qu'il importe de déterminer en fonction de u.

L'équation de l'orbite est

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\Phi};$$

on en conclut

$$r\cos\Phi = \frac{-u^2 - c + p}{e};$$

comme on a

$$p = 2c - \frac{c^2}{a}, \quad e = 1 - \frac{c}{a},$$

il en résulte

$$r\cos\Phi = -\frac{u^2}{1 - \frac{c}{a}} + c. \tag{a}$$

Nous aurons ensuite

$$r^2\sin^2\Phi = r^2 - r^2\cos^2\Phi = (u^2 + c)^2 - \frac{(u^2 + c - p)^2}{\left(1 - \frac{c}{a}\right)^2}$$

$$= \frac{2p}{\left(1 - \frac{c}{a}\right)^2}\left(u^2 - \frac{u^4}{2a} - \frac{c}{a}u^2\right).$$

Nous en tirons

$$(b)\qquad r\sin\Phi = \frac{\sqrt{2p}}{1-\frac{c}{a}}\,u\left(1-\frac{u^2}{2a}-\frac{c}{a}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Nous avons ensuite

$$\left(1-\frac{u^2}{2a}-\frac{c}{a}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(1-\frac{u^2}{2a}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{\frac{c}{a}}{1-\frac{u^2}{2a}}\right)^{\frac{1}{2}};$$

développons le second facteur suivant la formule du binôme, puis substituons dans la formule (b) et nous aurons

$$r\sin\Phi = \frac{\sqrt{2p}}{1-\frac{c}{a}}\left[u\left(1-\frac{u^2}{2a}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\,\frac{c}{a}\,u\left(1-\frac{u^2}{2a}\right)^{-\frac{1}{2}}\right.$$
$$\left. - \frac{1}{2.4}\,\frac{c^2}{a^2}\,u\left(1-\frac{u^2}{2a}\right)^{-\frac{3}{2}} - \frac{1.3}{2.4.6}\,\frac{c^3}{a^3}\,u\left(1-\frac{u^2}{2a}\right)^{-\frac{5}{2}} - \dots\right],$$

où l'on aura encore à développer, suivant la formule du binôme, les puissances de $1-\frac{u^2}{2a}$.

A l'extrémité de la partie supérieure de l'orbite, les développements des puissances de $1-\frac{u^2}{2a}$ seraient peu convergents; nous montrerons plus loin comment on peut dans cette partie représenter $r\sin\Phi$ plus commodément. Mais on pourra aussi à cette extrémité remplacer, au moyen de l'interpolation, les puissances de $1-\frac{u^2}{2a}$ par des polynômes entiers.

Formules de perturbation.

5. Désignons par k la grandeur de l'axe du plan invariable, par β sa projection sur une perpendiculaire au plan de l'écliptique, par α la longitude du nœud de l'orbite, par g la distance angulaire du périhélie au nœud ascendant, comptée du second point vers le premier. Nous aurons cette formule

$$(1)\qquad m\,\delta V\,dt = -\,dh\,\delta\tau - d\beta\,\delta\alpha - dk\,\delta g + d\tau\,\delta h + d\alpha\,\delta\beta + dg\,\delta k,$$

mV étant l'accroissement de la fonction de forces (*Dynamique analytique*, Section VII, n° **16**).

Désignons par i l'inclinaison de l'orbite sur le plan de l'écliptique, nous aurons

$$(2) \qquad h = -\frac{l^2}{2a}, \quad k = l\sqrt{mp}, \quad \beta = k\cos i;$$

comme le Soleil n'est plus supposé fixe, on a $l^2 = (\mathrm{M} + m)m$; mais, m étant très-petit vis-à-vis de M, on peut laisser comme ci-dessus $l^2 = \mathrm{M}m$.

Aux quantités h, k, β, il convient de substituer les quantités a, p, i. En différentiant les formules (2), on a

$$dh = \frac{l^2}{2a^2}da, \quad dk = \frac{1}{2}\frac{l\sqrt{m}}{\sqrt{p}}dp,$$
$$d\beta = \frac{1}{2}l\sqrt{\frac{m}{p}}\,dp\cos i - l\sqrt{mp}\sin i\,di,$$

et l'on obtient trois autres équations, en changeant dans celles-ci la caractéristique d en δ. D'après cela, l'équation (1) devient

$$\begin{aligned} m\,\delta\mathrm{V} = &-\frac{l^2}{2a^2}\frac{da}{dt}\delta\tau - \left(\frac{1}{2}\frac{l\sqrt{m}}{\sqrt{p}}\frac{dp}{dt}\cos i - l\sqrt{mp}\sin i\frac{di}{dt}\right)\delta\alpha \\ &- \frac{1}{2}\frac{l\sqrt{m}}{\sqrt{p}}\frac{dp}{dt}\delta g + \frac{l^2}{2a^2}\frac{d\tau}{dt}\delta a \\ &+ \frac{d\alpha}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{l\sqrt{m}}{\sqrt{p}}\delta p\cos i - l\sqrt{mp}\sin i\,\delta i\right) + \frac{1}{2}\frac{dg}{dt}\frac{l\sqrt{m}}{\sqrt{p}}\delta p. \end{aligned}$$

Comme le premier membre peut aussi s'écrire

$$m\left(\frac{d\mathrm{V}}{da}\delta a + \frac{d\mathrm{V}}{dp}\delta p + \frac{d\mathrm{V}}{di}\delta i + \frac{d\mathrm{V}}{d\tau}\delta\tau + \frac{d\mathrm{V}}{d\alpha}\delta\alpha + \frac{d\mathrm{V}}{dg}\delta g\right),$$

on obtient, en égalant de part et d'autre les coefficients des variations des éléments,

$$-\frac{l^2}{2a^2}\frac{da}{dt} = m\frac{d\mathrm{V}}{d\tau}, \quad -\frac{l\sqrt{m}}{2\sqrt{p}}\frac{dp}{dt} = m\frac{d\mathrm{V}}{dg},$$
$$\frac{l^2}{2a^2}\frac{d\tau}{dt} = m\frac{d\mathrm{V}}{da}, \quad -\frac{d\alpha}{dt}l\sqrt{mp}\sin i = m\frac{d\mathrm{V}}{di},$$
$$-\frac{l\sqrt{m}}{2\sqrt{p}}\cos i\frac{dp}{dt} + l\sqrt{mp}\sin i\frac{di}{dt} = m\frac{d\mathrm{V}}{d\alpha},$$
$$\frac{d\alpha}{dt}\frac{l\sqrt{m}}{2\sqrt{p}}\cos i + \frac{l\sqrt{m}}{2\sqrt{p}}\frac{dg}{dt} = m\frac{d\mathrm{V}}{dp}.$$

On en tire

$$da = -\frac{2a^2}{M}\frac{dV}{d\tau}dt, \quad dp = -2\sqrt{p}\frac{dV}{dg}\frac{dt}{\sqrt{M}},$$

$$d\tau = \frac{2a^2}{M}\frac{dV}{da}dt, \quad d\alpha = \frac{-1}{\sin i\sqrt{p}}\frac{dV}{di}\frac{dt}{\sqrt{M}},$$

$$di = \frac{1}{\sin i\sqrt{p}}\frac{dV}{d\alpha}\frac{dt}{\sqrt{M}} - \frac{\cos i}{\sin i}\frac{dV}{dg}\frac{dt}{\sqrt{M}},$$

$$dg = 2\sqrt{p}\frac{dV}{dp}\frac{dt}{\sqrt{M}} + \frac{\cos i}{\sin i\sqrt{p}}\frac{dV}{di}\frac{dt}{\sqrt{M}}.$$

Telles sont les formules qui serviront à déterminer les éléments de la comète.

Sur la formation des dérivées de la fonction perturbatrice par rapport aux éléments de la comète.

6. Quand on appliquera les formules précédentes, il faudra y supposer la fonction perturbatrice V exprimée en fonction des six éléments a, p, τ, i, α, g et de t. Mais, comme nous avons calculé les coordonnées r, $r\cos\Phi$, $r\sin\Phi$ au moyen de la variable auxiliaire u, quand nous substituerons leurs expressions dans V, cette fonction se trouvera exprimée au moyen de u, et, pour appliquer les formules du numéro précédent, il faudra concevoir que u est exprimé en fonction de t, d'après l'équation du n° **5** qui fournit $t+\tau$ et que nous représenterons par

$$(1) \qquad t+\tau = \varphi(u, a, p);$$

car le second membre ne renferme que les quantités u, a, p, puisque c est connu au moyen de a et p.

Comme V ne dépend de τ que par u, on aura

$$\frac{dV}{d\tau} = \frac{dV}{du}\frac{du}{d\tau} = \frac{dV}{du}\frac{du}{dt},$$

$\frac{du}{dt}$ étant tiré de l'équation (1), et l'on en conclut

$$(2) \qquad \frac{dV}{d\tau}dt = \frac{dV}{du}du;$$

le second membre représente la différentielle totale de V, en regardant comme constantes les coordonnées de la planète perturbatrice.

Formons ensuite les expressions

$$\frac{dV}{da}dt, \quad \frac{dV}{dp}dt.$$

V renferme a explicitement et il le contient de plus par u d'après l'équation (1). On aura donc, en mettant entre parenthèses la dérivée partielle

$$\frac{dV}{da} = \left(\frac{dV}{da}\right) + \frac{dV}{du}\frac{du}{da}.$$

En différentiant (1) par rapport à a, on a

$$\frac{du}{da} = \frac{\varphi'_a}{-\varphi'_u},$$

φ'_a, φ'_u étant les dérivées de φ par rapport à a et u, et en différentiant t par rapport à la variable

$$dt = \varphi'_u\, du.$$

Nous aurons donc

$$(3) \qquad \frac{dV}{da}dt = \left(\frac{dV}{da}\right)\varphi'_u\, du - \frac{dV}{du}\varphi'_a\, du.$$

On a de même

$$(4) \qquad \frac{dV}{dp}dt = \left(\frac{dV}{dp}\right)\varphi'_u\, du - \frac{dV}{du}\varphi'_p\, du.$$

Comme i, α, g n'entrent pas dans l'équation (1), nous aurons

$$(5) \qquad \frac{dV}{di}dt = \left(\frac{dV}{di}\right)\varphi'_u\, du,$$

$$(6) \qquad \frac{dV}{d\alpha}dt = \left(\frac{dV}{d\alpha}\right)\varphi'_u\, du,$$

$$(7) \qquad \frac{dV}{dg}dt = \left(\frac{dV}{dg}\right)\varphi'_u\, du.$$

On voit donc comment on pourra former les quantités (2), (3), ..., (7), pour les porter dans les formules de perturbation, et l'on voit qu'elles seront fournies par des séries entières par rapport à la variable, si V est lui-même représenté par une série entière.

Fonction perturbatrice.

7. x, y, z étant les coordonnées rectangulaires de la comète, r son rayon vecteur, Φ son anomalie vraie et m sa masse, représentons par x_1, y_1, z_1, r_1, Φ_1, m_1 les mêmes quantités relatives à la planète perturbatrice et aussi par $r_{0,1}$ la distance de ces deux corps.

La fonction perturbatrice qui concerne la comète est

$$V = -\frac{m_1}{r_{0,1}} + \frac{m_1(xx_1 + yy_1 + zz_1)}{r_1^3},$$

et l'on a ensuite

$$r_{0,1}^2 = r^2 + r_1^2 - 2(xx_1 + yy_1 + zz_1),$$
$$\frac{r_1}{a} = 1 - e_1 \cos n_1(t + \tau_1) + \ldots,$$
$$\Phi_1 = n_1(t + \tau_1) + 2e_1 \sin n_1(t + \tau_1) + \ldots,$$

a_1 étant le demi-grand axe de la planète, e_1 son excentricité, n_1 sa vitesse angulaire moyenne et $-\tau_1$ le temps de son passage à son périhélie.

Désignons par i_1, α_1, g_1 les quantités relatives à la planète, analogues à i, α, g et posons

$$p = -\cos i \sin\alpha \sin g + \cos\alpha \cos g,$$
$$q = -\cos i \sin\alpha \cos g - \cos\alpha \sin g,$$
$$p' = \cos i \cos\alpha \sin g + \sin\alpha \cos g,$$
$$q' = \cos i \cos\alpha \cos g - \sin\alpha \sin g,$$
$$p'' = \sin i \sin g,$$
$$q'' = \sin i \cos g.$$

Soient aussi $p_1, q_1, p'_1, q'_1, p''_1, q''_1$ les mêmes quantités pour la planète; posons de plus

$$pp_1 + p'p'_1 + p''p''_1 = G_1,$$
$$pq_1 + p'q'_1 + p''q''_1 = G_2,$$
$$p_1q + p'_1q' + p''_1q'' = G_3,$$
$$qq_1 + q'q'_1 + q''q''_1 = G_4;$$

G_1, G_2, G_3, G_4 ne dépendront donc que des six éléments i, α, g, i_1, α_1, g_1 des deux orbites. Enfin posons encore

$$r(G_1 \cos\Phi \cos\Phi_1 + G_2 \cos\Phi \sin\Phi_1 + G_3 \cos\Phi_1 \sin\Phi + G_4 \sin\Phi \sin\Phi_1) = K;$$

nous aurons

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 = r_1 K,$$

et il en résulte

$$\frac{m_1(xx_1 + yy_1 + zz_1)}{r_1^3} = \frac{m_1 K}{r_1^2},$$

$$r_{0,1}^2 = r^2 + r_1^2 - 2r_1 K.$$

Nous avons d'ailleurs calculé ci-dessus les expressions de $r\sin\Phi$, $r\cos\Phi$, qui entrent dans K.

Sur des formules qui peuvent donner $t + \tau$ et $r\sin\Phi$ dans la région supérieure de l'orbite.

8. Les formules que j'ai obtenues (3 et 4) pour $t + \tau$ et $r\sin\Phi$ présentent des séries peu convergentes vers l'extrémité de l'orbite; on peut parer à cet inconvénient par l'interpolation, d'après ce que j'ai indiqué; mais on peut aussi déterminer $t + \tau$ et $r\sin\Phi$ par de nouvelles formules que je vais établir.

Joignons la position m de la comète au foyer non attractif F′ de l'orbite; désignons par r' la distance mF′ et par Φ' l'angle qu'elle fait avec le prolongement de la ligne qui joint les foyers F, F′; puis posons

$$r' = u'^2 + c.$$

Pour $u' = 0$, nous aurons $t = T$, le temps d'une demi-révolution et nous pouvons supposer que u' soit négatif sur la demi-orbite où u est positif, et par suite soit positif sur celle où u est négatif. Le temps pour lequel la comète passe à l'aphélie est $-\tau + T$; donc $t + \tau - T$ et Φ' s'obtiendront au moyen des séries qui donnent $t + \tau$ et Φ, en y changeant u en u'. D'après cela, si nous remarquons que nous avons

$$T = \frac{\pi a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{M}},$$

nous obtiendrons, d'après les n^{os} **3**, **4**, les formules suivantes :

$$(1)\qquad t+\tau-\frac{\pi a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{M}}=\frac{2}{\sqrt{M}}\sqrt{\frac{a}{A}}\left(T'_0+T'_1 c+T'_2\frac{c^2}{A}+\cdots\right),$$

avec

$$T'_0=\frac{u'^3}{3}+\frac{1}{2}\frac{1}{A}\frac{u'^5}{5}+\frac{1.3}{2.4}\frac{1}{A^2}\frac{u'^7}{7}+\cdots,$$

$$T'_1=u'+\frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{u'^3}{A}+\frac{1.3}{2.4}\frac{3}{5}\frac{u'^5}{A^2}+\cdots;$$

$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad\cdots$$

$$(2)\qquad r'\cos\Phi'=\frac{-u'^2}{1-\frac{c}{a}}+c,$$

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} r'\sin\Phi'=\frac{\sqrt{2p}}{1-\frac{c}{a}}\Bigg[&u'\left(1-\frac{u'^2}{2a}\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\frac{c}{a}u'\left(1-\frac{u'^2}{2a}\right)^{-\frac{1}{2}}\\ &-\frac{1}{2.4}\frac{c^2}{a^2}u'\left(1-\frac{u'^2}{2a}\right)^{-\frac{3}{2}}-\cdots\Bigg],\end{aligned}\right.$$

les puissances de $1-\frac{u'^2}{2a}$ devant être remplacées par leurs développements tirés de la formule du binôme. Il est évident que ces formules seront très-commodes à employer quand u' sera très-petit, c'est-à-dire vers l'extrémité de l'orbite.

Comme on a

$$r+r'=2a,$$

u'^2 s'exprimera au moyen de u^2 par la formule

$$u'^2=2a-2c-u^2.$$

Nous reconnaissons ensuite facilement que l'on a

$$-r\cos\Phi-r'\cos\Phi'=2a-2c,\quad r\sin\Phi=r'\sin\Phi',$$
$$r^2=r'^2+4(a-c)r'\cos\Phi'+4(a-c)^2.$$

Ces trois formules, jointes aux formules (2), (3), permettent donc de calculer d'une manière nouvelle les quantités r^2, $r\cos\Phi$, $r\sin\Phi$.

L'expression de la fonction V contient la distance $r_{0,1}$ de la comète à la planète perturbatrice, qui est donnée par la formule

$$r_{0,1}^2 = r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos(r, r_1);$$

$r\cos(r, r_1)$, comme nous avons vu, est de la forme $\mathrm{H}r\cos\Phi + \mathrm{H}_1 r\sin\Phi$, H, H_1 étant indépendants des coordonnées de la comète. On a donc

$$r_{0,1}^2 = r^2 + r_1^2 - 2r_1(\mathrm{H}r\cos\Phi + \mathrm{H}_1 r\sin\Phi)$$

ou

$$\begin{aligned} r_{0,1}^2 = r'^2 + 4(a-c)r'\cos\Phi' + 4(a-c)^2 + r_1^2 \\ + 2r_1\mathrm{H}(r'\cos\Phi' + 2a - 2c) - 2r_1\mathrm{H}_1 r'\sin\Phi'. \end{aligned}$$

En se servant des formules qui précèdent, on pourra exprimer la fonction perturbatrice V et ses dérivées par rapport aux éléments, au moyen de la variable u' qui est liée d'une manière si simple à la variable u.

Calcul des dérivées de V *par rapport aux éléments de la comète.*

9. Revenons aux expressions des dérivées de la fonction perturbatrice dont il a été déjà question au n° 6. Posons, pour abréger,

$$r_1 = a_1[1 - e_1\cos n_1(t+\tau_1) + \ldots] = a_1(1+s).$$

Si nous différentions l'expression de V

$$\mathrm{V} = -\frac{m_1}{r_{0,1}} + \frac{m_1\mathrm{K}}{r_1^2},$$

par rapport à α, nous aurons

$$\frac{d\mathrm{V}}{d\alpha} = -\frac{m_1}{r_{0,1}^2}\frac{dr_{0,1}}{d\alpha} + \frac{m_1}{a_1^2}(1+s)^{-2}\frac{d\mathrm{K}}{d\alpha}.$$

Or on a

$$r_{0,1}^2 = a_1^2(1+s)^2 + (u^2+c)^2 - 2a_1(1+s)\mathrm{K},$$

$$r_{0,1}\frac{dr_{0,1}}{d\alpha} = -a_1(1+s)\frac{d\mathrm{K}}{d\alpha};$$

il en résulte

$$(a)\qquad \frac{dV}{d\alpha} = \left[\frac{-m_1}{r_{0,1}^3} a_1(1+s) + \frac{m_1}{a_1^2}(1+s)^{-2}\right]\frac{dK}{d\alpha};$$

on obtient de même

$$(b)\qquad \frac{dV}{dg} = \left[\frac{-m_1}{r_{0,1}^3} a_1(1+s) + \frac{m_1}{a_1^2}(1+s)^{-2}\right]\frac{dK}{dg},$$

$$(c)\qquad \frac{dV}{di} = \left[\frac{-m_1}{r_{0,1}^3} a_1(1+s) + \frac{m_1}{a_1^2}(1+s)^{-2}\right]\frac{dK}{di}.$$

Formons les dérivées de K qui entrent dans ces formules. Pour simplifier l'écriture, posons

$$r\cos\Phi = \rho_1, \quad r\sin\Phi = \rho_2;$$

ρ_1, ρ_2 peuvent, d'après ce que nous avons vu, être exprimés sous forme entière par rapport à u. Nous aurons

$$K = \rho_1 G_1 \cos\Phi_1 + \rho_1 G_2 \sin\Phi_1 + \rho_2 G_3 \cos\Phi_1 + \rho_2 G_4 \sin\Phi_1.$$

Il en résulte

$$\frac{dK}{d\alpha} = \rho_1 \frac{dG_1}{d\alpha}\cos\Phi_1 + \rho_1\frac{dG_2}{d\alpha}\sin\Phi_1 + \rho_2\frac{dG_3}{d\alpha}\cos\Phi_1 + \rho_2\frac{dG_4}{d\alpha}\sin\Phi_1.$$

En différentiant les expressions de p, q, p', q', p'', q'' données au n° 7, on obtient

$$\frac{dp}{d\alpha} = -p', \quad \frac{dp'}{d\alpha} = p, \quad \frac{dp''}{d\alpha} = 0,$$

$$\frac{dq}{d\alpha} = -q', \quad \frac{dq'}{d\alpha} = q, \quad \frac{dq''}{d\alpha} = 0,$$

puis, d'après les valeurs de G_1, G_2, G_3, G_4 données dans le même numéro,

$$\frac{dG_1}{d\alpha} = -p'p_1 + pp'_1, \quad \frac{dG_3}{d\alpha} = -q'p_1 + qp'_1,$$

$$\frac{dG_2}{d\alpha} = -p'q_1 + pq'_1, \quad \frac{dG_4}{d\alpha} = -q'q_1 + qq'_1.$$

Nous avons donc en premier lieu

$$(A)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dK}{d\alpha} = &(-p'p_1 + pp'_1)\rho_1\cos\Phi_1 + (-p'q_1 + pq'_1)\rho_1\sin\Phi_1 \\ &+ (-q'p_1 + qp'_1)\rho_2\cos\Phi_1 + (-q'q_1 + qq'_1)\rho_2\sin\Phi_1. \end{aligned}\right.$$

La recherche de la dérivée de K par rapport à g conduit aux calculs suivants :

$$\frac{dK}{dg} = \frac{dG_1}{dg}\rho_1\cos\Phi_1 + \frac{dG_2}{dg}\rho_1\sin\Phi_1 + \frac{dG_3}{dg}\rho_2\cos\Phi_1 + \frac{dG_4}{dg}\rho_2\sin\Phi_1,$$

$$\frac{dp}{dg} = q,\quad \frac{dp'}{dg} = q',\quad \frac{dp''}{dg} = q'',$$

$$\frac{dq}{dg} = -p,\quad \frac{dq'}{dg} = -p',\quad \frac{dq''}{dg} = -p''.$$

$$\frac{dG_1}{dg} = G_3,\quad \frac{dG_2}{dg} = G_4,\quad \frac{dG_3}{dg} = -G_1,\quad \frac{dG}{dg} = -G_2.$$

Il en résulte en second lieu

$$(B)\quad \frac{dK}{dg} = G_3\rho_1\cos\Phi_1 + G_4\rho_1\sin\Phi_1 - G_1\rho_2\cos\Phi_1 - G_2\rho_2\sin\Phi_1.$$

Nous obtenons ensuite

$$\frac{dK}{di} = \frac{dG_1}{di}\rho_1\cos\Phi_1 + \frac{dG_2}{di}\rho_1\sin\Phi_1 + \frac{dG_3}{di}\rho_2\cos\Phi_1 + \frac{dG_4}{di}\rho_2\sin\Phi_1.$$

$$\frac{dp}{di} = \sin i\sin\alpha\sin g,\quad \frac{dp'}{di} = -\sin i\cos\alpha\sin g.\quad \frac{dp''}{di} = \cos i\sin g.$$

$$\frac{dq}{di} = \sin i\sin\alpha\cos g,\quad \frac{dq'}{di} = -\sin i\cos\alpha\cos g,\quad \frac{dq''}{di} = \cos i\cos g.$$

$$\frac{dG_1}{di} = \sin g\,(p_1\sin i\sin\alpha - p'_1\sin i\cos\alpha + p''_1\cos i).$$

$$\frac{dG_2}{di} = \sin g\,(q_1\sin i\sin\alpha - q'_1\sin i\cos\alpha + q''_1\cos i).$$

$$\frac{dG_3}{di} = \cos g\,(p_1\sin i\sin\alpha - p'_1\sin i\cos\alpha + p''_1\cos i).$$

$$\frac{dG_4}{di} = \cos g\,(q_1\sin i\sin\alpha - q'_1\sin i\cos\alpha + q''_1\cos i).$$

Nous en concluons en troisième lieu

$$(C)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{dK}{di} = [&(p_1 \sin i \sin\alpha - p'_1 \sin i \cos\alpha + p''_1 \cos i)\cos\Phi_1 \\ &+ (q_1 \sin i \sin\alpha - q'_1 \sin i \cos\alpha + q''_1 \cos i)\sin\Phi_1] \\ &\times (\rho_1 \sin g + \rho_2 \cos g).\end{aligned}\right.$$

10. Calculons la dérivée $\frac{dV}{du}$ nécessaire au calcul de l'élément a. Nous aurons

$$(d)\qquad \frac{dV}{du} = m_1 \frac{2u(u^2+c)}{r_{0,1}^3} + \left[\frac{m_1}{a_1^2}(1+s)^{-2} - m_1 \frac{a_1(1+s)}{r_{0,1}^3}\right]\frac{dK}{du},$$

avec

$$(D)\quad \frac{dK}{du} = G_1 \cos\Phi_1 \frac{d\rho_1}{du} + G_2 \sin\Phi_1 \frac{d\rho_1}{du} + G_3 \cos\Phi_1 \frac{d\rho_2}{du} + G_4 \sin\Phi_1 \frac{d\rho_2}{du}.$$

V, considéré comme fonction de u, renferme a par la quantité c et par K, qui lui-même contient a et c. Nous aurons donc

$$(e)\qquad \left(\frac{dV}{da}\right) = m_1 \frac{u^2+c}{r_{0,1}^3}\frac{dc}{da} + \left[\frac{m_1}{a_1^2}(1+s)^{-2} - m_1 \frac{a_1(1+s)}{r_{0,1}^3}\right]\frac{dK}{da},$$

avec

$$(E)\quad \frac{dK}{da} = G_1 \cos\Phi_1 \frac{d\rho_1}{da} + G_2 \sin\Phi_1 \frac{d\rho_1}{da} + G_3 \cos\Phi_1 \frac{d\rho_2}{da} + G_4 \sin\Phi_1 \frac{d\rho_2}{da},$$

c étant considéré comme fonction de a dans ρ_1, ρ_2.

On aura de même

$$(f)\qquad \left(\frac{dV}{dp}\right) = m_1 \frac{u^2+c}{r_{0,1}^3}\frac{dc}{dp} + \left[\frac{m}{a_1^2}(1+s)^{-2} - \frac{m_1 a_1(1+s)}{r_{0,1}^3}\right]\frac{dK}{dp},$$

$$(F)\quad \frac{dK}{dp} = G_1 \cos\Phi_1 \frac{d\rho_1}{dp} + G_2 \sin\Phi_1 \frac{d\rho_1}{dp} + G_3 \cos\Phi_1 \frac{d\rho_2}{dp} + G_4 \sin\Phi_1 \frac{d\rho_2}{dp}.$$

Les formules (a), (A), (b), (B), ..., (f), (F) montrent que les dérivées de la fonction V seront facilement réduites en séries entières, si l'on peut réduire $\frac{1}{r_{0,1}^3}$ en une telle série.

Calculons les dérivées par rapport à a et p, qui se trouvent dans ces dernières formules.

Nous avons d'abord

$$\frac{dc}{da} = -\frac{p^2}{8a^2} - \frac{p^3}{8a^3} - \frac{15}{128}\frac{p^4}{a^4} - \ldots,$$

$$\frac{dc}{dp} = \frac{1}{2} + \frac{p}{4a} + \frac{3p^2}{16a^2} + \frac{5p^3}{32a^3} + \ldots,$$

$$\frac{d\rho_1}{da} = \left(\frac{p}{2a^2} + \frac{3p^2}{4a^3} + \frac{15p^3}{16a^4} + \frac{35p^4}{32a^5} + \ldots\right)u^2 + \frac{dc}{da},$$

$$\frac{d\rho_1}{dp} = -\left(1 + \frac{3p}{2a} + \frac{15p^2}{8a^2} + \frac{35p^3}{16a^3} + \ldots\right)\frac{u^2}{2a} + \frac{dc}{dp}.$$

Pour indiquer les expressions des dérivées de ρ_2, posons

$$\varepsilon = \frac{c}{a},\ A = \frac{\sqrt{2p}}{1 - \frac{c}{a}},$$

nous aurons

$$A = \sqrt{2p}\left(1 + \frac{p}{2a} + \frac{3p^2}{8a^2} + \frac{5p^3}{16a^3} + \frac{35}{128}\frac{p^4}{a^4} + \ldots\right),$$

$$\begin{aligned}\frac{d\rho_2}{da} = \frac{A u^3}{2a^2}\Bigg[&\frac{1}{2}\left(1 - \frac{u^2}{2a}\right)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\varepsilon\left(1 - \frac{u^2}{2a}\right)^{-\frac{3}{2}} \\ &+ \frac{1}{2.4}\,\frac{3}{2}\,\varepsilon^2\left(1 - \frac{u^2}{2a}\right)^{\frac{5}{2}} + \frac{1.3}{2.4.6}\,\frac{5}{2}\,\varepsilon^3\left(1 - \frac{u^2}{2a}\right)^{-\frac{7}{2}} + \ldots\Bigg] \\ &+ \frac{dA}{da}\,u\left(1 - \frac{u^2}{2a}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\frac{d(\varepsilon A)}{da}\,u\left(1 - \frac{u^2}{2a}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &- \frac{1}{2.4}\frac{d(\varepsilon^2 A)}{da}\,u\left(1 - \frac{u^2}{2a}\right)^{-\frac{3}{2}} - \frac{1.3}{2.4.6}\frac{d(\varepsilon^3 A)}{da}\,u\left(1 - \frac{u^2}{2a}\right)^{-\frac{5}{2}} \\ &- \frac{1.3.5}{2.4.6.8}\frac{d(\varepsilon^4 A)}{da}\,u\left(1 - \frac{u^2}{2a}\right)^{-\frac{7}{2}} - \ldots,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\rho_2}{dp} = &\frac{dA}{dp}\,u\left(1 - \frac{u^2}{2a}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\frac{d(\varepsilon A)}{dp}\,u\left(1 - \frac{u^2}{2a}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &- \frac{1}{2.4}\frac{d(\varepsilon^2 A)}{dp}\,u\left(1 - \frac{u^2}{2a}\right)^{-\frac{3}{2}} - \frac{1.3}{2.4.6}\frac{d(\varepsilon^3 A)}{dp}\,u\left(1 - \frac{u^2}{2a}\right)^{-\frac{5}{2}} - \ldots.\end{aligned}$$

Les dérivées de εA, $\varepsilon^2 A$, ..., par rapport à a et p se formeront immédiatement, sachant que l'on a

$$\varepsilon A = \sqrt{2}\left(\frac{p^{\frac{3}{2}}}{2a} + \frac{3p^{\frac{5}{2}}}{8a^2} + \frac{5p^{\frac{7}{2}}}{16a^3} + \frac{35}{128}\frac{p^{\frac{9}{2}}}{a^4} + \ldots\right),$$

$$\varepsilon^2 A = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{p^{\frac{5}{2}}}{a^2} + \frac{p^{\frac{7}{2}}}{a^3} + \frac{15}{16}\frac{p^{\frac{9}{2}}}{a^4} + \ldots\right),$$

$$\varepsilon^3 A = \frac{\sqrt{2}}{8}\left(\frac{p^{\frac{7}{2}}}{a^3} + \frac{5}{4}\frac{p^{\frac{9}{2}}}{a^4} + \ldots\right),$$

$$\varepsilon^4 A = \frac{\sqrt{2}}{16}\left(\frac{p^{\frac{9}{2}}}{a^4} + \ldots\right).$$

. . . .

Développement de $\frac{1}{r^3_{0,1}}$.

11. L'expression de K est

$$K = \rho_1 G_1 \cos\Phi_1 + \rho_1 G_2 \sin\Phi_1 + \rho_2 G_3 \cos\Phi_1 + \rho_2 G_4 \sin\Phi_1;$$

l'expression de ρ_2 se compose d'une première partie (n° 4)

$$A u\left(1 - \frac{u^2}{2a}\right)^{\frac{1}{2}},$$

qui est le plus considérable et que nous désignerons par ρ_3; nous représenterons par ρ_4 la partie restante de ρ_2, en sorte que

$$\rho_2 = \rho_3 + \rho_4.$$

Faisons encore

$$K_0 = \rho_1 G_1 \cos n_1(t+\tau_1) + \rho_1 G_2 \sin n_1(t+\tau_1) + \rho_3 G_3 \cos n_1(t+\tau_1) + \rho_3 G_4 \sin n_1(t+\tau_1);$$

désignons la quantité $n_1(t+\tau_1)$, qui forme la partie la plus considérable de Φ_1, par φ et la partie restante par L, en sorte que

$$\Phi_1 = n_1(t+\tau_1) + L = \varphi + L;$$

alors, si nous posons

$$K = K_0 + K_1,$$

nous aurons

$$K_1 = \frac{dK_0}{d\rho_3}\rho_4 + \frac{dK_0}{d\varphi}L + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2K_0}{d\rho_3^2}\rho_4^2 + 2\frac{d^2K_0}{d\rho_3\,d\varphi}\rho_4 L + \frac{d^2K_0}{d\varphi^2}L^2\right) + \ldots.$$

Enfin posons, comme précédemment (n° 9),

$$r_1 = a_1(1+s)$$

et de plus

$$\left[a_1^2 - 2K_0 a_1 + (u^2+c)^2\right]^{-\frac{3}{2}} = \Theta,$$

il en résultera

$$(h)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{r_{0,1}^3} = \Theta &+ \frac{d\Theta}{da_1}a_1 s + \frac{d\Theta}{dK_0}K_1 \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\Theta}{da_1^2}a_1^2 s^2 + 2\frac{d^2\Theta}{da_1\,dK_0}a_1 s K_1 + \frac{d^2\Theta}{dK_0^2}K_1^2\right) \\ &+ \ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Il reste à développer Θ.

Première méthode. — Si nous développons l'expression

$$(1 - 2xy + y^2)^{-\frac{3}{2}}$$

suivant les puissances de y, nous aurons

$$(l)\qquad (1 - 2xy + y^2)^{-\frac{3}{2}} = 1 + L_1 y + L_2 y^2 + L_3 y^3 + \ldots,$$

en faisant

$$L_1 = 3x,$$

$$L_2 = -\frac{3}{2} + \frac{3.5}{2.4}4x^2,$$

$$L_3 = -\frac{3.5}{2.4}2.2x + \frac{3.5.7}{2.4.6}2^3x^3,$$

$$L_4 = \frac{3.5}{2.4} - \frac{3.5.7}{2.4.6}3.2^2x^2 + \frac{3.5.7.9}{2.4.6.8}2^4x^4,$$

$$L_5 = \frac{3.5.7}{2.4.6}\,\frac{3.2}{1.2}\,2x - \frac{3.5.7.9}{2.4.6.8}4.2^3x^3 + \frac{3.5.7.9.11}{2.4.6.8.10}2^5x^5,$$

$$\begin{aligned} L_6 = &-\frac{3.5.7}{2.4.6}\,\frac{3.2.1}{1.2.3} + \frac{3.5.7.9}{2.4.6.8}\,\frac{4.3}{1.2}\,2^2x^2 \\ &+ \frac{3.5.7.9.11}{2.4.6.8.10}5.2^4x^4 + \frac{3.5.7.9.11.13}{2.4.6.8.10.12}2^6x^6 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Il est aisé de reconnaître que cette série, procédant suivant les puissances ascendantes de y, est convergente pour toute valeur de y dont le module est inférieur à l'unité, si x est < 1.

Suivant que $u^2 + c$ est plus petit ou plus grand que a_1, écrivons Θ sous l'une de ces deux formes

$$\Theta = a_1^{-3}\left[1 - 2\frac{K_0}{u^2+c}\,\frac{u^2+c}{a_1} + \left(\frac{u^2+c}{a_1}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}},$$

$$\Theta = (u^2+c)^{-3}\left[1 - 2\frac{K_0}{u^2+c}\,\frac{a_1}{u^2+c} + \left(\frac{a_1}{u^2+c}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}}.$$

Si $u^2 + c$ est $< a_1$, c'est-à-dire si la comète est plus rapprochée du Soleil que la planète, on pourra développer Θ d'après la formule (l), en faisant

$$x = \frac{K_0}{u^2+c}, \quad y = \frac{u^2+c}{a_1};$$

on aura ainsi

$$\Theta = \frac{1}{a_1^3} + \frac{3}{a_1^4}K_0 + \left[-\frac{3}{2}(u^2+c)^2 + \frac{15}{2}K_0^2\right]\frac{1}{a_1^5}$$
$$+ \left[-\frac{15}{2}K_0(u^2+c) + \frac{35}{2}K_0^3\right]\frac{1}{a_1^6} + \ldots;$$

on formera facilement les dérivées de Θ par rapport à K_0 et a_1, et l'on substituera les séries qui représentent Θ et ses dérivées dans l'équation (k).

Si $u^2 + c$ est $> a_1$ et par suite la comète plus éloignée du Soleil que la planète, on développera Θ d'après la formule (l) en faisant

$$x = \frac{K_0}{u^2+c}, \quad y = \frac{a_1}{u^2+c},$$

et l'on aura

$$\Theta = \frac{1}{(u^2+c)^3} + \frac{3K_0 a_1}{(u^2+c)^5} + \left[-\frac{3}{2}\,\frac{1}{(u^2+c)^5} + \frac{15}{2}\,\frac{K_0^2}{(u^2+c)^7}\right]a_1^2$$
$$+ \left[-\frac{15}{2}\,\frac{K_0}{(u^2+c)^7} + \frac{35}{2}\,\frac{K_0^3}{(u^2+c)^9}\right]a_1^3 + \ldots.$$

Cette expression de Θ est beaucoup moins commode que la précédente, parce qu'elle n'est pas entière par rapport à u, mais qu'elle renferme.

comme dénominateurs de ses différents termes, des puissances de $u^2 + c$.

Seconde méthode. — La méthode précédente a l'inconvénient d'exiger essentiellement la distinction de deux cas; elle est d'une application facile dans le premier cas, mais il n'en est pas de même dans le second, comme nous venons de le dire.

Pour opérer d'une manière plus uniforme et n'avoir pas à distinguer si la comète est plus ou moins éloignée du Soleil que la planète perturbatrice, ce qui sera surtout utile, si l'on veut avoir égard aux perturbations provenant de plusieurs planètes, on procédera de la manière suivante :

On a

$$\Theta = [a_1^2 + (u^2 + c)^2]^{-\frac{3}{2}}\left[1 - \frac{2K_0 a_1}{a_1^2 + (u^2 + c)^2}\right]^{-\frac{3}{2}},$$

et si l'on pose

$$a_1^2 + (u^2 + c)^2 = P,$$

il en résulte

$$\begin{aligned}\Theta &= P^{-\frac{3}{2}}\left(1 - \frac{2K_0 a_1}{P}\right)^{-\frac{3}{2}} \\ &= P^{-\frac{3}{2}} + 3K_0 a_1 P^{-\frac{5}{2}} + \frac{3.5}{1.2}K_0^2 a_1^2 P^{-\frac{7}{2}} + \frac{3.5.7}{1.2.3}K_0^3 a_1^3 P^{-\frac{9}{2}} + \ldots.\end{aligned}$$

Pour développer les puissances de P renfermées dans cette formule, nous pouvons mettre P sous cette forme

$$P = [a_1^2 + (2a - c)^2]\left[1 + \frac{u^4 + 2cu^2 - 4a(a-c)}{a_1^2 + (2a-c)^2}\right];$$

la fonction $\dfrac{u^4 + 2cu^2 - 4a(a-c)}{a_1^2 + (2a-c)^2}$ est une quantité négative dont la valeur absolue est plus petite que l'unité; on peut donc développer les puissances de P d'après la formule du binôme; mais ces développements ne seront pas ordonnables suivant les puissances de u; ils seraient néanmoins entiers par rapport à u, mais leurs termes seraient très-compliqués.

Aussi ce qu'il y aura de préférable sera-t-il de remplacer $P^{-\frac{3}{2}}$, $P^{-\frac{5}{2}}$, ...

au moyen de l'interpolation par des polynômes entiers en u, et l'on aura ainsi Θ même, sous forme entière.

On calculera de même les dérivées de Θ,

$$\frac{d\Theta}{dK_0} = 3a_1\left(P^{-\frac{5}{2}} + 5K_0 a_1 P^{-\frac{7}{2}} + \frac{5.7}{1.2}K_0^2 a_1^2 P^{-\frac{9}{2}} + \frac{5.7.9}{1.2.3}K_0^3 a_1^3 P^{-\frac{11}{2}} + \ldots\right),$$

$$\frac{d\Theta}{da_1} = -3(a_1 - K_0)\left(P^{-\frac{5}{2}} + 5K_0 a_1 P^{-\frac{7}{2}} + \frac{5.7}{1.2}K_0^2 a_1^2 P^{-\frac{9}{2}} + \ldots\right),$$

ainsi que les dérivées des ordres supérieurs ; elles s'obtiendront toutes sous forme entière.

On pourrait aussi développer Θ en série entière par rapport à la variable u', en employant les formules du n° **8**.

Intégration des formules de perturbation.

12. Quand on aura calculé les seconds membres des formules de perturbation du n° **5**, d'après tout ce qui précède, on ne pourra pas encore passer immédiatement à leur intégration ; car, auparavant, il faudra faire disparaître dans ces seconds membres le temps t qui se trouve introduit par les coordonnées de la planète perturbatrice, afin de n'y laisser que la variable u.

D'après les formules qui fournissent (n^{os} **9**, **10**) les dérivées de V, le temps t entre dans ces dérivées par s, $\sin\Phi_1$, $\cos\Phi_1$ et par $\frac{1}{r_{0,1}^3}$ qui renferme ces trois quantités.

Les expressions des coordonnées de la planète sont

$$r_1 = a_1(1 + s)$$

avec $s = -e_1\cos n_1(t+\tau_1) - \frac{e_1^2}{2}[\cos 2n_1(t+\tau_1) - 1] + \ldots;$

$$\Phi_1 = n_1(t+\tau_1) + L$$

avec $L = 2e_1\sin n_1(t+\tau_1) + \frac{5}{4}e_1^2\sin 2n_1(t+\tau_1) + \ldots,$

On a

$$n_1 = \sqrt{M}\,a_1^{-\frac{3}{2}},$$

et d'après la formule qui donne $t+\tau$ (n° 5), si nous posons

$$F = 2a_1^{-\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{a}{A}}\left(\frac{u^3}{3} + \frac{1}{2}\frac{1}{A}\frac{u^5}{5} + \frac{1.3}{2.4}\frac{1}{A^2}\frac{u^7}{7} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{1}{A^3}\frac{u^9}{9} + \cdots\right)$$

$$S = 2a_1^{-\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{a}{A}}\left(T_1 c + T_2\frac{c^2}{A} + T_3\frac{c^3}{A^2} + \cdots\right),$$

nous obtiendrons

$$n_1(t+\tau) = F + S,$$
$$n_1(t+\tau_1) = n_1(\tau_1 - \tau) + F + S.$$

Si donc on pose

$$J_1 = \sin n_1(\tau_1-\tau)\left(1 - \frac{S^2}{1.2} + \frac{S^4}{1.2.3.4} - \cdots\right) + \cos n_1(\tau_1-\tau)\left(S - \frac{S^3}{1.2.3} + \cdots\right),$$

$$J_2 = \cos n_1(\tau_1-\tau)\left(1 - \frac{S^2}{1.2} + \frac{S^4}{1.2.3.4} - \cdots\right) - \sin n_1(\tau_1-\tau)\left(S - \frac{S^3}{1.2.3} + \cdots\right),$$

on obtiendra

$$\sin n_1(t+\tau_1) = J_1\cos F + J_2\sin F,$$
$$\cos n_1(t+\tau_1) = J_2\cos F - J_1\sin F.$$

En remplaçant la quantité S dans J_1, J_2, on obtiendra J_1, J_2 sous forme de séries entières en u, qu'on ordonnera par rapport aux puissances de c. D'après la formule qui donne F, on peut développer $\sin F$, $\cos F$ en des séries entières par rapport à u; mais il pourra être plus commode dans la pratique de remplacer $\sin F$, $\cos F$ au moyen de l'interpolation par des fonctions entières de u d'un nombre limité de termes.

Connaissant en fonction de u les quantités $\sin n_1(t+\tau_1)$, $\cos n_1(t+\tau_1)$, on en conclura facilement s et L. Enfin, connaissant $\sin n_1(t+\tau_1)$, $\cos n_1(t+\tau_1)$ et L en fonction de u, nous formerons

$\sin\Phi_1$, $\cos\Phi_1$ au moyen des formules

$$\sin\Phi_1 = \sin n_1(t+\tau_1)\left(1-\frac{L^2}{1.2}+\cdots\right)+\cos n_1(t+\tau_1)\left(L-\frac{L^3}{1.2.3}+\cdots\right),$$
$$\cos\Phi_1 = \cos n_1(t+\tau_1)\left(1-\frac{L^2}{1.2}+\cdots\right)-\sin n_1(t+\tau_1)\left(L-\frac{L^3}{1.2.3}+\cdots\right).$$

Si donc Θ a été calculé sous forme entière, ce qui aura lieu lorsqu'on emploiera la seconde méthode (n° **11**), les différentielles des éléments troublés se présenteront sous la forme entière par rapport à u et s'intégreront très-facilement. Les intégrations, quoique sans difficulté, pourraient être assez compliquées, si l'on employait la première méthode de développement de Θ.

Sur l'équation $7x^4 - 5y^4 = 2z^2$;

PAR LE P. PEPIN, S. J.

---

1. La résolution en nombres entiers des équations comprises dans la formule générale

$$ax^4 + by^4 = cz^2$$

est le plus souvent impossible; mais, lorsqu'une équation de cette sorte admet une solution, elle en admet une infinité qu'on déduit successivement l'une de l'autre au moyen de diverses formules. Toutefois, il n'est pas toujours possible d'affirmer qu'on ne laisse échapper aucune solution exprimée par des nombres inférieurs à ceux qui forment les solutions calculées. Il est évident qu'en ce cas le problème n'est pas complétement résolu. Je me propose d'étudier, en prenant pour exemple l'équation

$$7x^4 - 5y^4 = 2z^2, \tag{1}$$

diverses méthodes que l'on peut employer pour chercher une solution complète, permettant d'obtenir avec certitude toutes les solutions exprimées par des nombres inférieurs à une limite donnée. Il ne faudrait pas se faire illusion sur la généralité de ces méthodes; elles conduisent au résultat cherché dans le cas actuel et dans d'autres cas semblables; mais elles pourraient bien, en certains cas, ne donner qu'une solution incomplète.

2. La méthode de décomposition en facteurs, employée par Fermat, n'est pas immédiatement applicable à l'équation proposée ; mais, si l'on en retranche l'identité

$$7x^4 - 5x^4 = 2x^4,$$

on obtient l'équation équivalente

$$5(x^4 - y^4) = 2(z^2 - x^4).$$

Si nous posons

$$x^2 + y^2 = m(x^2 - z),$$

m sera un nombre rationnel et l'on déduira de l'équation précédente

$$5m(y^2 - x^2) = 2(x^2 + z),$$

de sorte que les trois indéterminées x, y, z, considérées comme fonctions du nombre rationnel m, sont assujetties à vérifier les deux équations

$$(1 - m)x^2 + y^2 + mz = 0,$$
$$(5m + 2)x^2 - 5my^2 + 2z = 0,$$

dont la résolution s'obtient par les formules suivantes :

$$\frac{x^2}{5m^2 + 2} = \frac{y^2}{5m^2 + 4m - 2} = \frac{z}{5m^2 - 10m - 2}.$$

Comme les solutions où les indéterminées auraient un facteur commun se déduisent facilement des solutions en nombres entiers et premiers entre eux, nous ne considérons que ces dernières solutions et nous supposons x, y, z premiers entre eux deux à deux. Ces nombres peuvent s'exprimer en fonction de deux nombres entiers et premiers entre eux ; il suffit pour cela de poser $m = \frac{p}{q}$ dans les dernières équations, qui deviennent alors

$$\frac{x^2}{5p^2 + 2q^2} = \frac{y^2}{5p^2 + 4pq - 2q^2} = \frac{z}{5p^2 - 10pq - 2q^2}.$$

Comme x, y et z sont premiers entre eux deux à deux, si l'on re-

présente par μ le plus grand diviseur commun des trois dénominateurs, on en déduit

$$(a)\quad \begin{cases} \mu x^2 = 5p^2 + 2q^2, \\ \mu y^2 = 5p^2 + 4pq - 2q^2, \\ \mu z = 5p^2 - 10pq - 2q^2. \end{cases}$$

3. Or le nombre μ n'est susceptible que d'un petit nombre de valeurs faciles à déterminer. D'abord la première formule montre que μ doit être positif; puis, en substituant $5p^2 \equiv -2q^2$ (mod. μ), on déduit des deux autres équations

$$4pq - 4q^2 \equiv 0, \quad 10pq + 4q^2 \equiv 0 \quad (\text{mod. } \mu);$$

d'où l'on conclut

$$(b)\qquad 14pq \equiv 0 \quad (\text{mod. } \mu).$$

D'ailleurs, en considérant que p et q sont premiers entre eux, on déduit de la première des formules (a) que μ ne peut avoir avec p^2 aucun diviseur commun autre que 2, et avec q aucun diviseur commun autre que 5. On doit donc conclure de la formule (b) que le nombre μ doit être un diviseur positif du produit $2.5.7 = 70$.

Supposons d'abord μ non divisible par 5. Il sera donc diviseur positif de 14, de sorte qu'il n'aura que l'une des valeurs 1, 2, 7 ou 14. Mais les deux valeurs extrêmes 1 et 14 sont exclues par la congruence

$$\mu x^2 \equiv 2q^2 \quad (\text{mod. } 5),$$

que l'on déduit de la première des formules (a). Si $\mu = 2$, posons $p = 2p_1$ et divisons par 2 les formules (a). Nous obtenons un premier système de solutions exprimé par les formules

$$(\text{I})\quad \begin{cases} x^2 = q^2 + 10p_1^2, \\ y^2 = 10p_1^2 + 4p_1q - q^2, \\ z = 10p_1^2 - 10p_1q - q^2. \end{cases}$$

Si $\mu = 7$, la deuxième des formules (a), mise sous la forme

$$7y^2 = 7p^2 - 2(p-q)^2,$$

montre que $p - q$ est divisible par 7, de sorte que l'on peut poser $p - q = 7f$, en désignant par f un nombre entier premier avec q. Dans ce cas, les formules (a), débarrassées du facteur 7, deviennent

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} x^2 = q^2 + 10fq + 35f^2 = (q + 5f)^2 + 10f^2, \\ y^2 = q^2 + 14fq + 35f^2 = (q + 5f)^2 + 4fq + 10f^2, \\ z \;\; = 35f^2 - q^2. \end{cases}$$

Lorsque μ est multiple de 5, le nombre q doit être aussi divisible par 5, de sorte que nous pouvons poser $\mu = 5\alpha$, $q = 5q_1$; les équations (a), débarrassées du facteur 5, deviennent alors

$$(a') \quad \begin{cases} \alpha x^2 = p^2 + 10q_1^2, \\ \alpha y^2 = p^2 + 4pq_1 - 10q_1^2, \\ \alpha z \;\; = p^2 - 10pq_1 - 10q_1^2. \end{cases}$$

On déduit de la première formule que α doit être résidu quadratique de 5, ce qui exclut les valeurs 2 et 7. Comme ce nombre α est un diviseur positif de 14, il ne peut avoir que l'une des deux valeurs 1 ou 14. Dans le premier cas, les formules précédentes deviennent

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} x^2 = p^2 + 10q_1^2, \\ y^2 = p^2 + 4pq_1 - 10q_1^2, \\ z \;\; = p^2 - 10pq_1 - 10q_1^2. \end{cases}$$

Si $\alpha = 14$, la seconde formule du groupe (a'), mise sous la forme

$$14y^2 = (p + 2q_1)^2 - 14q_1^2,$$

montre que la somme $p + 2q_1$ est divisible par 14; posant donc

$$p = 14f - 2q_1,$$

et supprimant le facteur 14 après la substitution, on obtient

$$\text{(IV)} \quad \begin{cases} x^2 = q_1^2 - 4fq_1 + 14f^2, \\ y^2 = 14f^2 - q_1^2, \\ z \;\; = q_1^2 - 14fq_1 + 14f^2. \end{cases}$$

4. La résolution de l'équation proposée se trouve ainsi ramenée à celle des quatre systèmes que nous venons d'obtenir. Toutefois, il nous suffira d'en considérer deux, car les systèmes I et IV sont impossibles. L'impossibilité du système (I) est rendue manifeste par la deuxième équation. On peut, en effet, la mettre sous la forme

$$y^2 = 14p_1^2 - (q - 2p_1)^2;$$

si $q - 2p_1$ n'est pas divisible par 7, on en déduit cette conséquence fausse que -1 serait résidu quadratique de 7. Si, au contraire, $q - 2p_1$ est multiple de 7, on obtient pour x et y des valeurs divisibles par 7, tandis que nous supposons ces nombres premiers entre eux. La dernière formule montre immédiatement que, si l'on suppose $q \equiv 2p_1 \pmod{7}$, y est multiple de 7. On le constate pour x en substituant $q^2 \equiv 4p_1^2 \pmod{7}$, ce qui donne $x^2 \equiv 14p_1^2 \pmod{7}$.

On constate de la même manière l'impossibilité du système IV. D'abord on ne peut pas supposer q_1 multiple de 7, parce que les trois nombres x, y, z auraient un diviseur commun, contrairement à l'hypothèse. Mais, q_1 étant premier avec 7, on déduirait de la deuxième équation que -1 serait résidu quadratique de 7, ce qui n'est pas.

Il nous suffit donc de résoudre les deux systèmes II et III. Bien plus, un seul de ces systèmes donne toutes les solutions possibles; car le système II se ramène au système III par la substitution unimodulaire $q = p - 5q_1, f = q_1$; ces deux systèmes sont donc équivalents.

5. Notre problème se trouve ainsi ramené à celui de trouver, en nombres entiers et premiers entre eux, toutes les solutions des deux équations simultanées

$$(c) \qquad \begin{cases} x^2 = p^2 + 10q^2, \\ y^2 = p^2 + 4pq - 10q^2. \end{cases}$$

Pour que les deux nombres x et y soient premiers entre eux, il est nécessaire que p soit impair; et, comme la différence $x^2 - p^2$ ne peut être paire sans être divisible par 8, il faut que le nombre q soit pair. Nous pouvons donc poser $q = 2mn$ et déduire de la première des

équations (c), par la décomposition en facteurs,

$$x \pm p = 2m^2 \quad \text{ou} \quad 4m^2,$$
$$x \mp p = 20n^2 \quad \text{ou} \quad 10n^2,$$

de sorte que les trois nombres p, q, x seront exprimés par l'un des deux systèmes d'équations

$$x = m^2 + 10n^2, \quad \pm p = m^2 - 10n^2, \quad q = 2mn;$$
$$x = 2m^2 + 5n^2, \quad \pm p = 2m^2 - 5n^2, \quad q = 2mn.$$

La valeur de y^2 sera exprimée dans le premier cas par la formule

$$y^2 = (m^2 + 4mn - 10n^2)^2 - 56m^2n^2,$$

et, dans le second cas, par la formule

$$y^2 = (2m^2 + 4mn - 5n^2)^2 - 56m^2n^2.$$

C'est à la résolution de ces deux équations que notre problème se trouve ramené. Mais, avant d'aller plus loin, nous remarquerons que l'emploi des nombres complexes donne beaucoup plus simplement le résultat que nous venons d'obtenir.

6. Comme il n'existe que deux classes de formes quadratiques dont le déterminant soit égal à -10, on déduit des principes exposés dans notre Mémoire sur les nombres complexes $a + b\sqrt{-c}$ (t. I de ce Journal, p. 317) que les solutions en nombres entiers et premiers entre eux de l'équation

$$5x^4 + 2z^2 = 7x^4$$

sont données par les deux formules

$$\pm\sqrt{5}y^2 \pm \sqrt{-2}z = (\sqrt{5} + \sqrt{-2})(p + q\sqrt{-10})^2,$$
$$\pm\sqrt{5}y^2 \pm \sqrt{-2}z = (\sqrt{5} + \sqrt{-2})(p\sqrt{5} + q\sqrt{-2})^2,$$

dont la première fournit les solutions où le nombre x est de la forme $p^2 + 10q^2$, et l'autre celles où ce nombre est de la forme $5p^2 + 2q^2$. En effectuant les calculs indiqués, puis en égalant entre eux les coefficients de $\sqrt{5}$ et de $\sqrt{-2}$, et en déterminant le signe de y^2

par la considération du module 4, on trouve que les deux groupes de solutions sont exprimés respectivement par les deux systèmes d'équations

$$(2) \quad \begin{cases} x = p^2 + 10q^2, \\ y^2 = p^4 - 60p^2q^2 + 100q^4 - 8pq\ (p^2 - 10q^2), \\ z = p^4 - 60p^2q^2 + 100q^4 + 20pq(p^2 - 10q^2), \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} x = 5p^2 + 2q^2, \\ y^2 = 25p^4 - 60p^2q^2 + 4q^4 - 8pq(5p^2 - 2q^2), \\ z = 25p^4 - 60p^2q^2 + 4q^4 + 20pq(5p^2 - 2q^2). \end{cases}$$

Nous ne prenons dans ces formules qu'une seule des deux valeurs de z égales et de signes contraires, parce que les signes des indéterminées sont indifférents pour le but que nous avons en vue. Les deux nombres p et q peuvent recevoir toutes les valeurs premières entre elles, capables de vérifier la deuxième équation de chacun des deux systèmes. Ces équations peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$(\text{A}) \quad \begin{cases} (1) \quad y^2 = (p^2 - 4pq - 10q^2)^2 - 56p^2q^2, \\ (2) \quad y^2 = (5p^2 - 4pq - 2q^2)^2 - 56p^2q^2. \end{cases}$$

Elles ne different que par les notations de celles que nous avons obtenues dans le numéro précédent. Nous allons les résoudre successivement.

7. On déduit de la première de ces équations, par la décomposition en facteurs,

$$\pm(p^2 - 4pq - 10q^2) \pm y = 2s^2 \quad \text{ou} \quad 4s^2,$$
$$\pm(p^2 - 4pq - 10q^2) \mp y = 28t^2 \quad \text{ou} \quad 14t^2,$$

de sorte que la résolution de cette équation est ramenée à celle des deux systèmes

$$\pm(p^2 - 4pq - 10q^2) = s^2 + 14t^2, \quad pq = st, \quad \pm y = s^2 - 14t^2;$$
$$\pm(p^2 - 4pq - 10q^2) = 2s^2 + 7t^2, \quad pq = st, \quad \pm y = 2s^2 - 7t^2.$$

Comme on a identiquement $p^2 - 4pq - 10q^2 = (p - 2q)^2 - 14q^2$, on voit immédiatement, par la considération du module 7, que l'on doit

exclure le signe inférieur dans la première équation de chacun de ces deux systèmes; car avec ce signe on serait amené à cette conclusion absurde que -1 ou -2 seraient résidus quadratiques de 7.

Ainsi on aurait dans le second système

$$(p-2q)^2 - 7t^2 = 2(s^2 + 7q^2);$$

ce qui est impossible; car, le nombre p étant impair, t doit l'être également; de sorte que l'on déduit de l'équation $pq = st$ que les deux nombres s et q sont tous deux pairs ou tous deux impairs. Le second membre de la dernière formule est donc nécessairement multiple de 8, tandis que le premier membre est de la forme $8l + 2$. La résolution de l'équation (A, 1) est donc ramenée à celle du système unique

$$(4)\quad pq = st, \quad p^2 - 4pq - 10q^2 = s^2 + 14t^2, \quad \pm y = s^2 - 14t^2.$$

De même, en appliquant à l'équation (A, 2) la décomposition en facteurs, on obtient les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
pq &= st, & \pm(5p^2 - 4pq - 2q^2) \pm y &= 2s^2 \quad \text{ou} \quad 4s^2. \\
& & \pm(5p^2 - 4pq - 2q^2) \mp y &= 28t^2 \quad \text{ou} \quad 14t^2, \\
pq &= st, & \pm(5p^2 - 4pq - 2q^2) &= s^2 + 14t^2, \quad \pm y = s^2 - 14t^2, \\
pq &= st, & \pm(5p^2 - 4pq - 2q^2) &= 2s^2 + 7t^2, \quad \pm y = 2s^2 - 7t^2.
\end{aligned}$$

On conclut d'abord de l'identité $5p^2 - 4pq - 2q^2 = 7p^2 - 2(p+q)^2$ qu'on doit prendre le signe inférieur dans la deuxième équation de chacun de ces deux systèmes; car avec le signe supérieur on aurait ce résultat absurde que -2 serait résidu quadratique de 7. De plus, on doit rejeter le premier système. On aurait en effet

$$2(p+q)^2 - 7p^2 = s^2 + 14t^2;$$

or, p étant impair, il faut que s le soit aussi, de sorte que l'équation $pq = st$ exige que les deux nombres q et t soient de même parité, de sorte que des deux nombres t et $(p+q)$ l'un est nécessairement pair tandis que l'autre est impair. Si donc nous mettons la dernière équation sous la forme

$$2(p+q)^2 - 14t^2 = s^2 + 7p^2,$$

nous voyons que le premier membre est de la forme $8l+2$, tandis que le second est multiple de 8. Il suffit donc de considérer le second système.

Les résultats obtenus jusqu'ici peuvent se résumer de la manière suivante. Les solutions de l'équation proposée se partagent en deux groupes, suivant la forme quadratique de la première indéterminée x, et sont déterminées en fonction de p, q, s et t, au moyen des deux systèmes de formules

$$(5)\qquad \begin{cases} x = p^2 + 10q^2, \quad y = s^2 - 14t^2, \\ z = p^4 + 20p^3q - 60p^2q^2 - 200pq^3 + 100q^4, \\ pq = st, \quad p^2 - 10q^2 = s^2 + 4st + 14t^2; \end{cases}$$

$$(6)\qquad \begin{cases} x = 5p^2 + 2q^2, \quad y = 2s^2 - 7t^2, \\ z = 25p^4 + 100p^3q - 60p^2q^2 - 40pq^3 + 4q^4, \\ pq = st, \quad 2p^2 - 5q^2 = 2s^2 - 4st + 7t^2. \end{cases}$$

8. L'équation $pq = st$, commune aux deux systèmes, est résolue d'une manière complète par les formules

$$(7)\qquad p = \lambda h, \quad q = \mu k, \quad s = \lambda\mu, \quad t = hk,$$

où λ, μ, h et k désignent des nombres entiers quelconques, assujettis à la condition unique de rendre premiers entre eux les deux nombres p et q, ainsi que les deux nombres s et t. Cette condition est remplie en prenant les quatre nombres λ, μ, h et k premiers entre eux deux à deux, et elle ne peut l'être que de cette manière.

La substitution des expressions (7) dans la dernière formule du système (5) donne entre les quatre nombres λ, μ, h et k l'équation

$$(8)\qquad 2(7h^2 + 5\mu^2)k^2 + 4h\mu.\lambda k + \lambda^2(\mu^2 - h^2) = 0;$$

en la résolvant successivement par rapport aux deux quotients $\frac{k}{\lambda}$ et $\frac{h}{\mu}$, on trouve

$$(9)\qquad \begin{cases} \dfrac{k}{\lambda} = \dfrac{-\mu h \pm \frac{1}{2}\sqrt{2(7h^4 - 5\mu^4)}}{7h^2 + 5\mu^2}, \\[2ex] \dfrac{h}{\mu} = \dfrac{-2\lambda k \pm \sqrt{\lambda^4 - 140k^4}}{14k^2 - \lambda^2}. \end{cases}$$

On voit, par la première de ces formules, que les nombres h, μ forment une solution de l'équation proposée, car, pour déterminer une valeur rationnelle du rapport $\frac{k}{\lambda}$, ils doivent vérifier la condition

$$7h^2 - 5\mu^2 = 2l^2, \tag{10}$$

l désignant un nombre entier. Ainsi toute solution de l'équation proposée dans laquelle la première indéterminée, x, est de la forme $p^2 + 10q^2$, dépend d'une solution $x = h$, $y = \mu$ de la même équation, et on la déduit de cette solution au moyen des formules (9), (7) et (5). Inversement, de toute solution de l'équation (1) on déduit deux solutions de l'équation (8); car, si les nombres $x = h$, $y = \mu$ satisfont à l'équation (1), la première des formules (9) donne deux valeurs rationnelles du rapport $\frac{k}{\lambda}$. En les réduisant à des fractions irréductibles, on aura deux systèmes de valeurs des nombres k et λ, lesquelles formeront avec les deux nombres h et μ deux solutions de l'équation (8). Chacun de ces systèmes de valeurs de k et de λ satisfait à l'équation

$$\lambda^4 - 140k^4 = g^2, \tag{11}$$

car autrement les valeurs du rapport $\frac{h}{\mu}$, déterminées par la seconde des formules (9), ne seraient pas rationnelles.

9. Dans le second groupe de solutions de l'équation (1), la dernière équation donne entre les quatre nombres λ, μ, h, k la condition

$$(5\mu^2 + 7h^2)k^2 - 4h\mu\lambda k + 2(\mu^2 - h^2)\lambda^2 = 0, \tag{12}$$

d'où l'on déduit

$$\left\{\begin{aligned} \frac{k}{\lambda} &= \frac{2h\mu \pm \sqrt{2(7h^4 - 5\mu^4)}}{7h^2 + 5\mu^2}, \\ \frac{h}{\mu} &= \frac{2k\lambda \pm \sqrt{4\lambda^4 - 35k^4}}{7k^2 - 2\lambda^2}. \end{aligned}\right. \tag{13}$$

Il résulte de ces formules que les deux nombres h et μ forment une solution de l'équation proposée, et les nombres λ, k une solution de l'équation

$$4\lambda^4 - 35k^4 = f^2. \tag{14}$$

Ainsi toute solution de l'équation (1) fournit deux nombres h, μ propres à vérifier l'équation (12); on en déduit, par la première des formules (13), deux systèmes de valeurs de λ et de k qui satisfont à l'équation (14). De même, toute solution de l'équation (14) donne deux nombres λ, k, d'où l'on déduit, par la seconde des formules (13), deux systèmes de valeurs de h et μ, formant deux solutions de l'équation (1); en associant les nombres λ, k avec ces deux systèmes de valeurs, on obtient deux solutions de l'équation (12) et, par les formules (7), deux solutions de l'équation (1). Le lien qui unit entre elles les solutions des trois équations (1), (12) et (14) fait qu'on est assuré de les résoudre complétement toutes trois, pourvu qu'on résolve complétement l'une d'elles. Il faut en dire autant des équations (1), (8) et (10), de sorte qu'en résolvant complétement l'une quelconque des cinq équations (1), (8), (10), (12) et (14), nous sommes assurés d'obtenir pour chacune des autres toutes les solutions formées par des nombres inférieurs à une limite donnée.

10. Pour calculer les solutions des équations (8) et (12), nous poserons

$$\frac{k}{\lambda} = \xi, \quad \frac{h}{\mu} = \eta. \tag{15}$$

L'équation (8) deviendra

$$2(7\eta^2 + 5)\xi^2 + 4\xi\eta + (1 - \eta^2) = 0. \tag{8'}$$

A chaque valeur de η correspondent deux valeurs de ξ et réciproquement. Désignons par ξ et ξ' les deux valeurs de ξ que l'on peut associer à une même valeur de η, de manière à vérifier cette équation; la somme de ces deux valeurs sera déterminée par la formule

$$\xi + \xi' = \frac{-2\eta}{7\eta^2 + 5}. \tag{a}$$

De même, les deux valeurs de η que l'on peut associer dans l'équation (8') à une même valeur de ξ ont leur somme exprimée par la formule

$$\eta + \eta' = \frac{-4\xi}{14\xi^2 - 1}. \tag{b}$$

Au moyen de la solution évidente $\xi = 0$, $\eta = -1$, on obtient, par la formule (a), $\xi_1 = \frac{1}{6}$. Cette valeur de ξ peut être associée à deux valeurs de η, dont l'une nous est déjà connue, savoir $\eta = -1$; nous obtenons la seconde par la formule (b), qui devient

$$\eta_1 - 1 = \frac{-4\cdot 6}{14-36}, \quad \eta_1 = \frac{23}{31}.$$

Puis faisant $\eta = \frac{23}{11}$, $\xi' = \frac{1}{6}$, nous déduisons de la formule (a) $\xi_2 = -\frac{102}{359}$. Cette solution $\xi = -\frac{102}{359}$, $\eta' = \frac{23}{11}$ donne, par la formule (b), $\eta_2 = \frac{10127}{1525}$, et ainsi de suite. De cette manière, par l'emploi alternatif des formules (a) et (b), nous formons une suite de valeurs de ξ et de η, dans laquelle chaque valeur de η se trouve comprise entre les deux seules valeurs de ξ qu'on puisse lui associer pour vérifier l'équation (8). Cette suite est

$$(c) \qquad \begin{cases} \xi = 0, & \eta = -1, \quad \xi_1 = \frac{1}{6}, \\ \eta_1 = \frac{23}{11} & \xi_2 = -\frac{102}{359}, \quad \eta_2 = \frac{10127}{1525}, \quad \ldots. \end{cases}$$

Si, au lieu de partir de la formule (a), nous employons d'abord la formule (b) avec la même solution primitive $\eta = -1$, $\xi = 0$, nous formons une autre suite

$$\eta = -1, \quad \xi = 0, \quad \eta_1 = 1, \quad \xi_1 = -\frac{1}{6}, \quad \eta_2 = -\frac{23}{11}, \quad \ldots,$$

que l'on peut considérer comme le prolongement vers la gauche de la suite (c). Mais, dans le cas actuel, elle n'offre aucun intérêt, parce qu'elle ne présente que les termes de la suite (c) changés de signes.

11. L'équation (12) peut se résoudre de la même manière. Après l'avoir mise sous la forme

$$(12') \qquad (7\eta^2 + 5)\xi^2 - 4\eta\xi + 2(1 - \eta^2) = 0,$$

en faisant les substitutions indiquées par les formules (15), on en déduit les deux formules

$$(a') \qquad \xi + \xi' = \frac{4\eta}{7\eta^2 + 5},$$

$$(b') \qquad \eta + \eta' = \frac{4\xi}{7\xi^2 - 2},$$

dont l'emploi alternatif, à partir de la solution primitive, $\eta = 1$, $\xi = 0$, donne une suite indéfinie de solutions

$$(d)\quad \xi = 0,\quad \eta = 1,\quad \xi_1 = \tfrac{1}{3},\quad \eta_1 = -\tfrac{23}{11},\quad \xi_2 = -\tfrac{204}{359},\quad \ldots.$$

Les valeurs de η sont les mêmes que dans le cas précédent, et celles de ξ sont doublées. On pouvait le prévoir, car il suffit de remplacer dans les formules (a'), (b') les nombres ξ, ξ' par 2ξ, $2\xi'$ et les nombres η, η' par $-\eta$ et $-\eta'$, pour identifier ces formules avec les formules (a) et (b).

La méthode que nous venons d'indiquer pour résoudre les équations (8′) et (12′) revient au fond à celle qu'Euler a donnée dans un Mémoire posthume, publié en 1830 par l'Académie impériale de Saint-Pétersbourg (*Mémoires*..., t. XI, p. 69).

Les solutions de l'équation proposée se déduisent de ce calcul en égalant le rapport $\frac{h}{\mu}$ aux diverses valeurs de η comprises dans l'une des suites (c) ou (d). Comme les deux nombres h et μ sont premiers entre eux, ils se trouvent par là complétement déterminés. Cette méthode est très-simple, mais on n'est pas assuré d'obtenir, de cette manière, toutes les solutions possibles; car il n'est pas démontré que toutes les solutions de l'équation (8′) se déduisent successivement des solutions primitives $\eta = \pm 1$, $\xi = 0$, par l'emploi alternatif des formules (a) et (b). Il pourrait exister quelque autre solution primitive, donnant lieu à une suite de solutions non comprises dans la suite (c).

12. Notre problème est pourtant susceptible d'une solution complète, que l'on déduit des formules (5), (6), (7), (8) et (12). En effet, quelle que soit la solution considérée de l'équation (1), solution que nous désignons par (x_1, y_1, z_1), tant que la première indéterminée x_1 est supérieure à l'unité, on peut, par la décomposition en facteurs de celle des formules A qui correspond à cette solution, la ramener à une autre solution en nombres moindres, et l'exprimer en fonction de cette nouvelle solution, soit au moyen des formules (5) et (8), si x_1 est de la forme $p^2 + 10q^2$, soit au moyen des formules (6) et (12), si x_1 est de la forme $5p^2 + 2q^2$. En remplaçant les nombres h, μ par x, y, on déduit des formules citées les expressions suivantes de la solution

(x_1, y_1, z_1):

$$(\mathrm{I})\begin{cases}(1) & x_1 = \lambda^2 x^2 + 10k^2y^2, \quad \pm y_1 = \lambda^2 y^2 - 14k^2x^2,\\ (2) & z_1 = (\lambda^2x^2 + 10\lambda kxy - 10k^2y^2)^2 - 140\lambda^2k^2x^2y^2,\\ (3) & \dfrac{k}{\lambda} = \dfrac{-xy \pm z}{7x^2 + 5y^2}, \quad 7x^4 - 5y^4 = 2z^2.\end{cases}$$

$$(\mathrm{II})\begin{cases}(1) & x_1 = 5\lambda^2 x^2 + 2k^2y^2, \quad \pm y_1 = 2\lambda^2 y^2 - 7k^2x^2,\\ (2) & z_1 = (5\lambda^2x^2 + 10\lambda kxy - 2k^2y^2)^2 - 140\lambda^2k^2x^2y^2,\\ (3) & \dfrac{k}{\lambda} = \dfrac{2xy \pm 2z}{7x^2 + 5y^2}, \quad 7x^4 - 5y^4 = 2z^2.\end{cases}$$

On a le premier système quand x_1 est de la forme $p^2 + 10q^2$, le second quand x_1 est de la forme $5p^2 + 2q^2$. Inversement, de toutes solutions (x, y, z) de l'équation (1) on en déduit deux autres en nombres plus grands, une par chacun des deux systèmes (I) et (II). A cause du double signe de z dans la formule qui détermine le rapport $\frac{k}{\lambda}$ on pourrait croire qu'une même solution peut en fournir quatre autres; mais, comme les nombres x_1, y_1 doivent être premiers entre eux, le signe de z se trouve complétement déterminé. Dans les formules (I), λ doit être un nombre impair; d'ailleurs le dénominateur est de la forme $8l + 4$; il faut donc choisir le signe de z de manière à rendre le numérateur $-xy \pm z$ divisible par 4. Dans les formules (II), au contraire, le nombre k devant être impair, il faut choisir le signe de z de telle sorte que la somme $xy \pm z$ soit de la forme $4l + 2$.

La nouvelle solution (x, y, z) pourra de même se ramener à une solution en nombres moindres, pourvu que x soit supérieur à l'unité. Elle sera exprimée en fonction de la nouvelle solution par les formules (I) ou par les formules (II), suivant la forme quadratique de x. Comme les valeurs de x sont positives, elles ne peuvent pas décroître indéfiniment. On parviendra donc nécessairement à la solution (1, 1, 1) dans laquelle, x étant égal à 1, les formules (c) du n° 5 ne sont possibles qu'en faisant $q = 0$, et dans ce cas la décomposition en facteurs cesse d'être applicable. On formera ainsi, à partir de la solution (x_1, y_1, z_1), une suite de solutions dans lesquelles la première indéterminée x présente des valeurs positives et décroissantes; le dernier terme de cette suite est la solution évidente (1, 1, 1), et chaque terme

est exprimé en fonction du suivant par l'un des deux groupes de formules (I) ou (II). Si donc nous appliquons ces formules dans un ordre inverse, nous obtiendrons, à partir du terme (1, 1, 1), tous les termes de cette suite, et conséquemment le premier, qui est la solution considérée (x_1, y_1, z_1).

En appliquant les formules (I) à la solution (1, 1, 1) et en prenant le signe de manière à obtenir une valeur impaire de λ, on trouve $k = 0$, et l'on retombe sur la même solution (1, 1, 1). Les formules (II) donnent la solution (23, 11, 971). Cette nouvelle solution en donne deux autres, dont l'une figure nécessairement parmi les solutions décroissantes qui composent la suite que nous venons de considérer, à partir de la solution (x_1, y_1, z_1). Désignons-la par $(x_{n-2}, y_{n-2}, z_{n-2})$. L'application des formules (I) et (II) à la solution $(x_{n-2}, y_{n-2}, z_{n-2})$ donnera de même deux nouvelles solutions en nombres plus grands, dont l'une $(x_{n-3}, y_{n-3}, z_{n-3})$ fait partie de la suite en question. En réitérant ainsi un nombre suffisant de fois l'application des formules (I) et (II), on trouvera nécessairement, entre autres solutions, tous les termes de la suite considérée et par conséquent la solution (x_1, y_1, z_1), qui en est le premier terme. On est donc assuré d'obtenir par les formules (I) et (II), à partir de la solution primitive (1, 1, 1), toutes les solutions possibles de l'équation considérée, rangées suivant l'ordre croissant des valeurs de x.

15. Nous avons considéré les deux systèmes (I) et (II) afin de rendre notre démonstration plus rigoureuse. En pratique, un seul suffit pour donner toutes les solutions possibles, pourvu que l'on prenne successivement dans la formule (3) les deux signes de z, et que, dans celle des deux solutions où x_1 et y_1 sont divisibles par 2, on supprime ce facteur 2 ainsi que le facteur 4 dans la valeur correspondante de z_1. Considérons, en effet, dans le système (I) la solution étrangère qui correspond à une valeur paire de λ. Supposons que l'on ait

$$\frac{k}{\lambda} = \frac{-xy \pm z}{7x^2 + 5y^2} = \frac{k}{2\lambda_1},$$

k étant impair et λ pair, égal à $2\lambda_1$. Si l'on supprime le facteur commun 2 de x_1 et de y_1, on trouve

$$x_1 = 2\lambda_1^2 x^2 + 5k^2 y^2, \quad y_1 = 2\lambda_1^2 y^2 - 7k^2 x^2.$$

Dans le même cas, on déduit des formules (II)

$$\frac{k'}{\lambda'} = \frac{2(xy - z)}{7x^2 + 5y^2},$$
$$x_1 = 2\lambda'^2 x^2 + 5k'^2 y^2, \quad y_1 = 2\lambda'^2 y^2 - 7k'^2 x^2.$$

Il suffit de comparer les valeurs des deux rapports $\frac{k}{\lambda}$, $\frac{k'}{\lambda'}$ pour reconnaître que l'on a

$$\frac{k'}{\lambda'} = -\frac{2k}{\lambda} = -\frac{k}{\lambda_1},$$

et par conséquent $k' = -k, \lambda' = \lambda_1$. Il en résulte que les valeurs de x_1 et de y_1 déterminées par les formules (II) se déduisent des formules (I) en prenant le signe auquel correspond une valeur paire de λ et en supprimant le facteur commun 2.

On peut donc remplacer les deux systèmes (I) et (II) par le système unique

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} \theta x_1 = \lambda^2 x^2 + 10k^2 y^2, \\ \pm \theta y_1 = \lambda^2 y^2 - 14k^2 x^2, \\ \theta^2 z_1 = (\lambda^2 x^2 + 10\lambda k xy - 10k^2 y^2)^2 - 140\lambda^2 k^2 x^2 y^2, \\ \frac{k}{\lambda} = \frac{-xy \pm z}{7x^2 + 5y^2}, \\ 7x^4 - 5y^4 = 2z^2. \end{cases}$$

On prendra $\theta = 2$ ou $\theta = 1$, suivant que λ sera pair ou impair.

Si l'on applique ces formules à la solution (23, 11, 971), on trouve pour le rapport $\frac{k}{\lambda}$ deux valeurs $\frac{1}{6}$ et $-\frac{102}{359}$. La première valeur devrait être rejetée dans les formules (I), parce qu'elle correspond à une solution dont les termes ne sont pas premiers entre eux. Mais, en faisant $\theta = 2$ dans les formules précédentes, on obtient

$$x_1 = 10127, \quad y_1 = 1525,$$

ce qui est précisément le résultat que l'on déduirait des formules (II). La seconde valeur du rapport $\frac{k}{\lambda}$ donne la solution

$$x_2 = 80766889, \quad y_2 = 61457423.$$

14. Afin d'apprécier la rapidité avec laquelle croissent les solutions successives, formons le produit des deux valeurs de x_1 qui correspondent à une même solution (x, y, z). Dans les formules (III) on a $\theta = 1$ pour l'une de ces valeurs et $\theta = 2$ pour l'autre, de sorte que le produit cherché est exprimé par la formule

$$2x_1x'_1 = (\lambda\lambda')^2\left[x^4 + 10\left(\frac{k^2}{\lambda^2} + \frac{k'^2}{\lambda'^2}\right)x^2y^2 + \frac{(kk')^2}{(\lambda\lambda')^2}y^4\right].$$

D'ailleurs, en remplaçant h et μ par x et y dans l'équation (8), on trouve

$$(10y^2 + 14x^2)\left(\frac{k}{\lambda}\right)^2 + 4xy\left(\frac{k}{\lambda}\right) + y^2 - x^2 = 0,$$

et l'on en déduit $\frac{kk'}{\lambda\lambda'} = \frac{y^2 - x^2}{10y^2 + 14x^2}$. Comme les deux nombres x et y sont premiers entre eux, les deux termes

$$\frac{y^2 - x^2}{24}, \quad \frac{10y^2 + 14x^2}{24}$$

ont aussi des valeurs entières et premières entre elles, de sorte que l'on peut poser

$$kk' = m\frac{y^2 - x^2}{24}, \quad \lambda\lambda' = m\frac{10y^2 + 14x^2}{24},$$

en désignant par m un nombre entier. La valeur numérique du produit $\lambda\lambda'$ est donc supérieure à $\frac{x^2}{2}$, et par conséquent $x_1x'_1$ est $> \frac{x^8}{8}$. Ce produit $x_1x'_1$ est du huitième ordre de grandeur par rapport à x. On voit d'ailleurs, par les formules (III), que le plus petit des deux facteurs x_1, x'_1 est compris entre le deuxième et le quatrième ordre de grandeur; l'autre facteur est donc compris entre le quatrième ordre et le sixième. Ainsi le produit des deux valeurs de x dans les deux solutions que l'on peut déduire de celle que nous avons désignée ci-dessus par x_2, y_2 serait exprimé par un nombre de plus de soixante chiffres; la plus petite des deux valeurs de x aurait plus de seize chiffres.

15. On peut encore résoudre l'équation proposée en lui faisant subir une transformation très-simple, qui permet d'appliquer immédia-

tement la décomposition en facteurs. Elle consiste à poser

$$x = m + n, \quad y = m - n,$$

ce qui est permis dans le cas actuel, puisque les deux nombres x et y sont tous deux impairs. En supprimant le facteur 2 dans le résultat de la substitution, on obtient l'équation

$$(16) \qquad z^2 = (m^2 + 12mn + n^2)^2 - 140\,m^2 n^2,$$

qui se décompose de l'une des deux manières suivantes :

$$mn = pq, \quad \pm(m^2 + 12mn + n^2) \pm z = \ \ 2p^2 \ \text{ ou } \ 10p^2,$$
$$mn = pq, \quad \pm(m^2 + 12mn + n^2) \mp z = 70q^2 \ \text{ ou } \ 14q^2\,;$$

de sorte que la résolution de l'équation proposée se trouve ramenée à celle des deux systèmes suivants :

$$pq = mn, \quad \pm(m^2 + 12mn + n^2) = \ \ p^2 + 35q^2,$$
$$pq = mn, \quad \pm(m^2 + 12mn + n^2) = 5p^2 + \ \ 7q^2.$$

Mais on doit rejeter le second système. On a, en effet,

$$m^2 + 12mn + n^2 = (m + 6n)^2 - 35n^2,$$

de sorte que la dernière équation peut se mettre sous la forme

$$\pm(m + 6n)^2 \mp 35n^2 = 5p^2 + 7q^2,$$

qui en manifeste l'impossibilité; car on en conclut, ou bien que 7 est résidu quadratique de 5, ce qui n'est pas, ou bien que les deux nombres $(m + 6n)$ et q sont multiples de 5 ; mais, dans ce dernier cas, on déduirait de l'équation $pq = mn$ que l'un des deux nombres m ou n doit être multiple de 5, de sorte que la somme $m + 6n$ ne pourrait l'être sans que les deux nombres m et n le fussent également. Comme il en résulterait pour x et pour y des valeurs divisibles par 5, la seconde conclusion est également inadmissible.

Quant au premier système, on voit, par la considération du module 7, qu'il n'est possible qu'avec le signe supérieur. La résolution de l'é-

quation (1) se trouve ainsi ramenée à celle du système

$$(17) \qquad pq = mn, \quad m^2 + 12mn + n^2 = p^2 + 35q^2.$$

Les solutions de l'équation (1) sont exprimées par les formules

$$(18) \qquad x = m + n, \quad y = m - n, \quad z = p^2 - 35q^2.$$

16. L'équation $pq = mn$ est résolue par les formules

$$m = \lambda h, \quad n = \mu k, \quad p = \lambda\mu, \quad q = hk,$$

où λ, μ, h, k désignent quatre nombres entiers, premiers entre eux deux à deux. En substituant ces expressions dans la deuxième des équations (17), on trouve

$$(19) \qquad (\mu^2 - 35h^2)k^2 + 12\,\mu h\,.\,\lambda k + (h^2 - \mu^2)\lambda^2 = 0.$$

En résolvant cette équation successivement par rapport aux deux quotients $\frac{k}{\lambda}$, $\frac{h}{\mu}$, on obtient les formules

$$(20) \qquad \begin{cases} \dfrac{k}{\lambda} = \dfrac{-6\mu h \pm \sqrt{\mu^4 + 35h^4}}{\mu^2 - 35h^2}, \\[2ex] \dfrac{h}{\mu} = \dfrac{-6\lambda k \pm \sqrt{\lambda^4 + 35k^4}}{\lambda^2 - 35k^2}; \end{cases}$$

d'où l'on voit que les nombres (λ, k) ainsi que (μ, h) forment autant de solutions de l'équation

$$(21) \qquad X^4 + 35Y^4 = Z^2.$$

Ainsi chaque solution de l'équation proposée est exprimée par les formules (18) en fonction de deux solutions de l'équation (21) assujetties à vérifier ensemble l'équation (19). Comme chaque solution de l'équation (21) peut être associée à deux autres solutions, de manière à vérifier l'équation (19), elle détermine deux solutions de l'équation (1). Il ne faudrait pas en conclure que cette équation admette au-dessous d'une limite donnée deux fois plus de solutions que celle-là ; car il faut deux solutions de l'équation (21) pour une solution de l'équation (1).

17. Les solutions de l'équation (21) s'obtiennent aisément par la

méthode posthume d'Euler. Posons pour cela $\frac{k}{\lambda} = \xi$, $\frac{h}{\mu} = \eta$; cette équation deviendra

(19') $$(1 - 35\eta^2)\xi^2 + 12\eta\xi + (\eta^2 - 1) = 0,$$

et l'on en déduira les deux formules

(a'') $$\xi + \xi' = \frac{12\eta}{35\eta^2 - 1},$$

(b'') $$\eta + \eta' = \frac{12\xi}{35\xi^2 - 1},$$

dont l'emploi alternatif fera connaître toutes les solutions que l'on peut déduire de la solution primitive $\xi = 0$, $\eta = 1$. On obtiendra ainsi la suite indéfinie

$$\xi = 0, \quad \eta = 1, \quad \xi_1 = \frac{6}{17}, \quad \eta_1 = \frac{253}{971}, \quad \xi_2 = \frac{73236}{38161}, \quad \cdots.$$

Chaque terme de cette suite détermine une solution de l'équation (21), et deux termes consécutifs donnent une solution de l'équation proposée. Au moyen des deux termes $\eta = 1$, $\xi_1 = \frac{6}{17}$, on obtient $\lambda = 17$, $k = 6$, $\mu = h = 1$, et l'on déduit des formules (18) $x = 23$, $y = 11$, $z = 971$.

Les deux termes $\xi_1 = \frac{6}{17}$, $\eta_1 = \frac{253}{971}$ donnent le système $\lambda = 17$, $k = 6$, $h = 253$, $\mu = 971$, d'où l'on déduit

$$x = 10127, \quad y = 1525;$$

et ainsi de suite. Cette méthode a l'inconvénient de n'offrir aucun moyen pour reconnaître avec certitude si l'on a obtenu, oui ou non, toutes les solutions exprimées par des nombres inférieurs à une limite donnée. La série précédente donne bien toutes les solutions de l'équation (19') que l'on peut déduire de la solution primitive $\xi = 0$, $\eta = 1$; mais il n'est pas démontré qu'il n'existe pas quelque autre solution primitive, donnant une suite distincte de la précédente. Si donc les formules du n° **15** exigent une discussion plus longue, cette complication est compensée par l'avantage qu'elles ont de donner une solution complète du problème proposé.

TABLE DES MATIÈRES.

TROISIÈME SÉRIE. — TOME V.

PLANCHES.

FIN DU TOME V DE LA TROISIÈME SÉRIE.

4950 Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

ERRATA

Au *Journal de Mathématiques pures et appliquées*

(numéros de mars et d'avril 1879).

Page 112, ligne 8,

Dans le second terme du numérateur de l'équation en y (formules A), remplacer le coefficient $\frac{1}{8}$ par $\frac{1}{16}$.

Même page, ligne 2 en remontant,

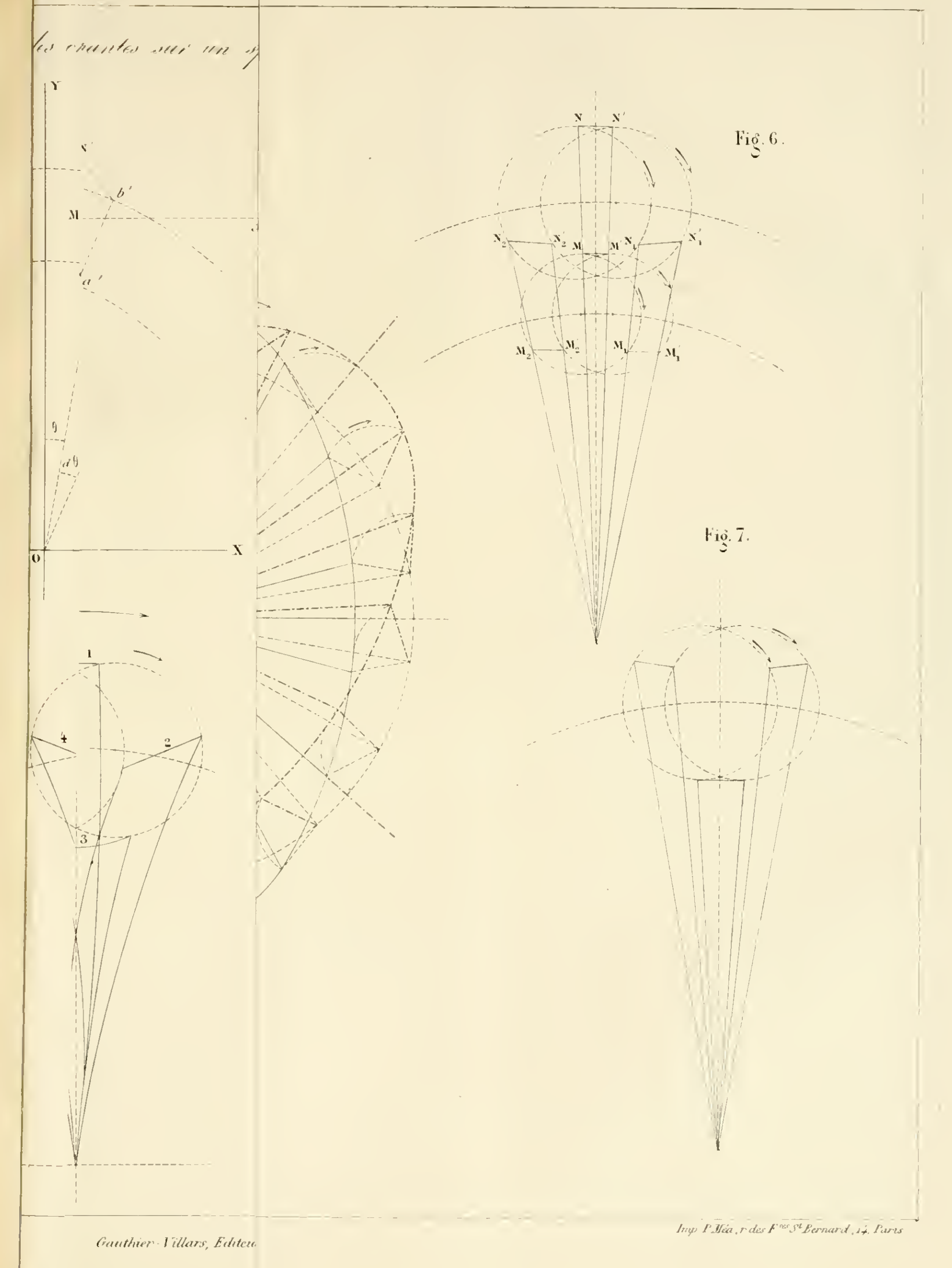
Dans le premier terme du numérateur de l'équation en $\frac{z}{b}$, écrire $\frac{1}{2}\beta^3$ au lieu de $\frac{1}{4}\beta^5$.

Devant le second terme du numérateur de la même équation, changer le coefficient $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{4}$.

Page 126, ligne 5 en remontant,

Au lieu de $\frac{n}{m} = 20$, *lisez* $\frac{m}{n} = 20$.

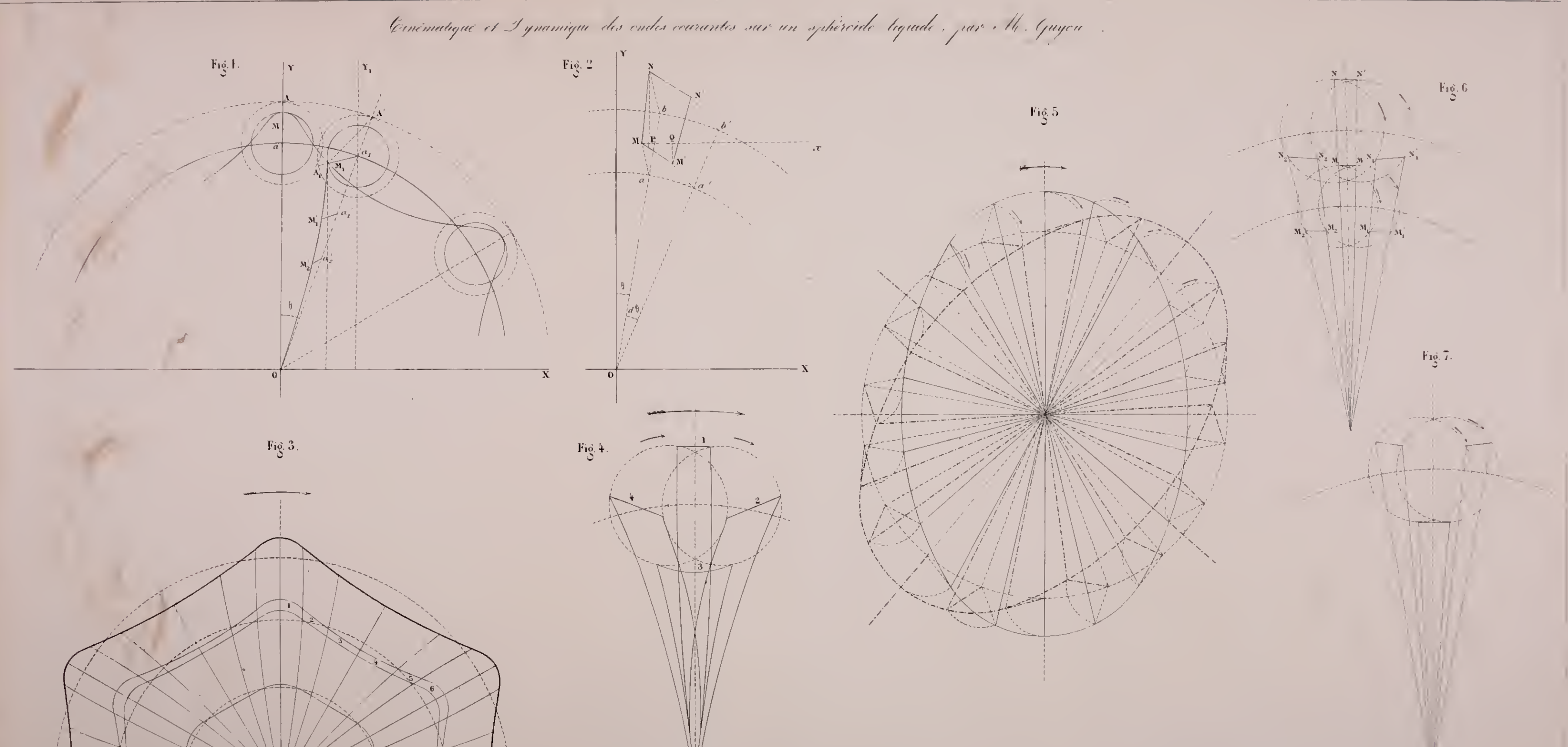
5997 Paris. — Imprimerie de Gauthier-Villars, quai des Grands-Augustins, 55.

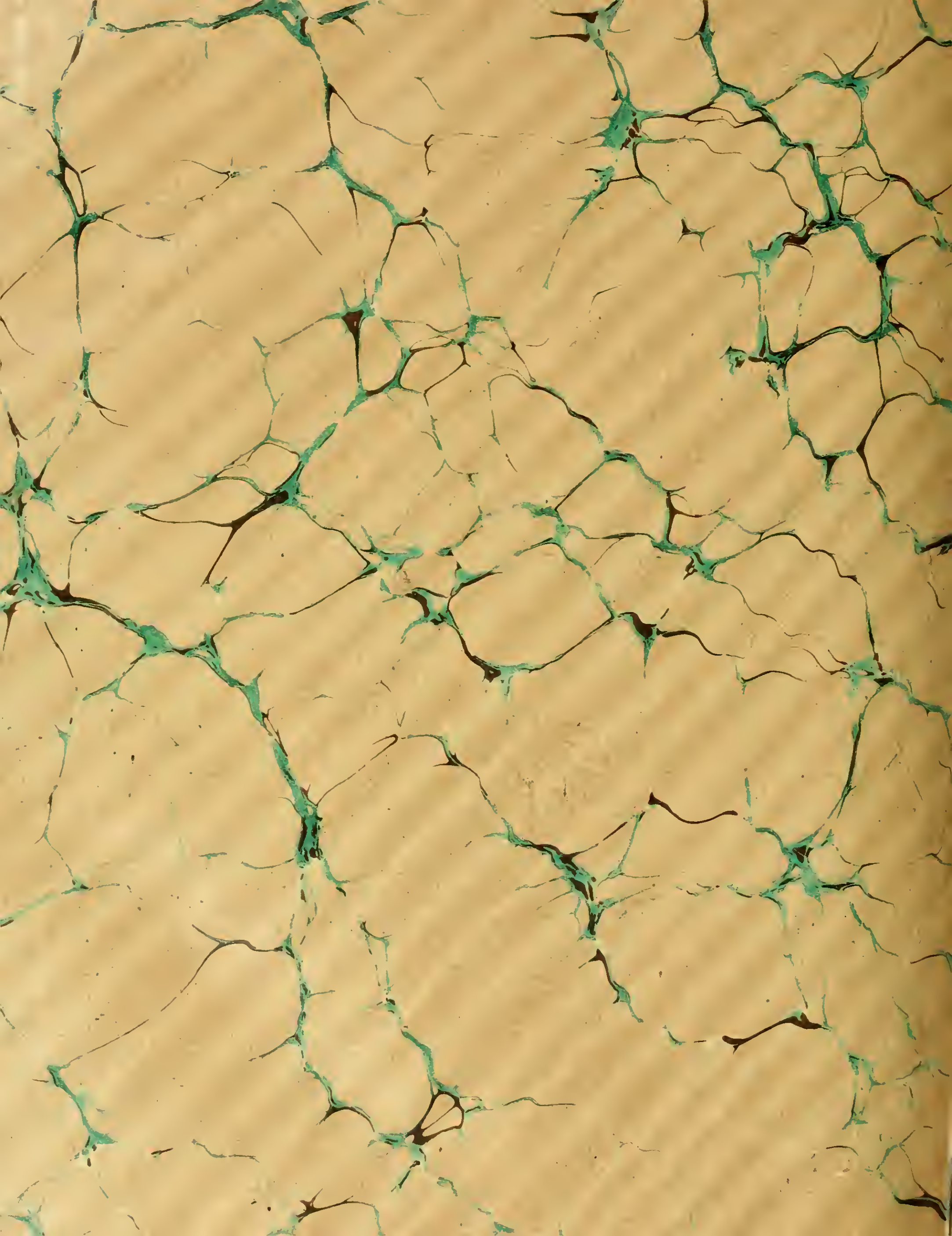


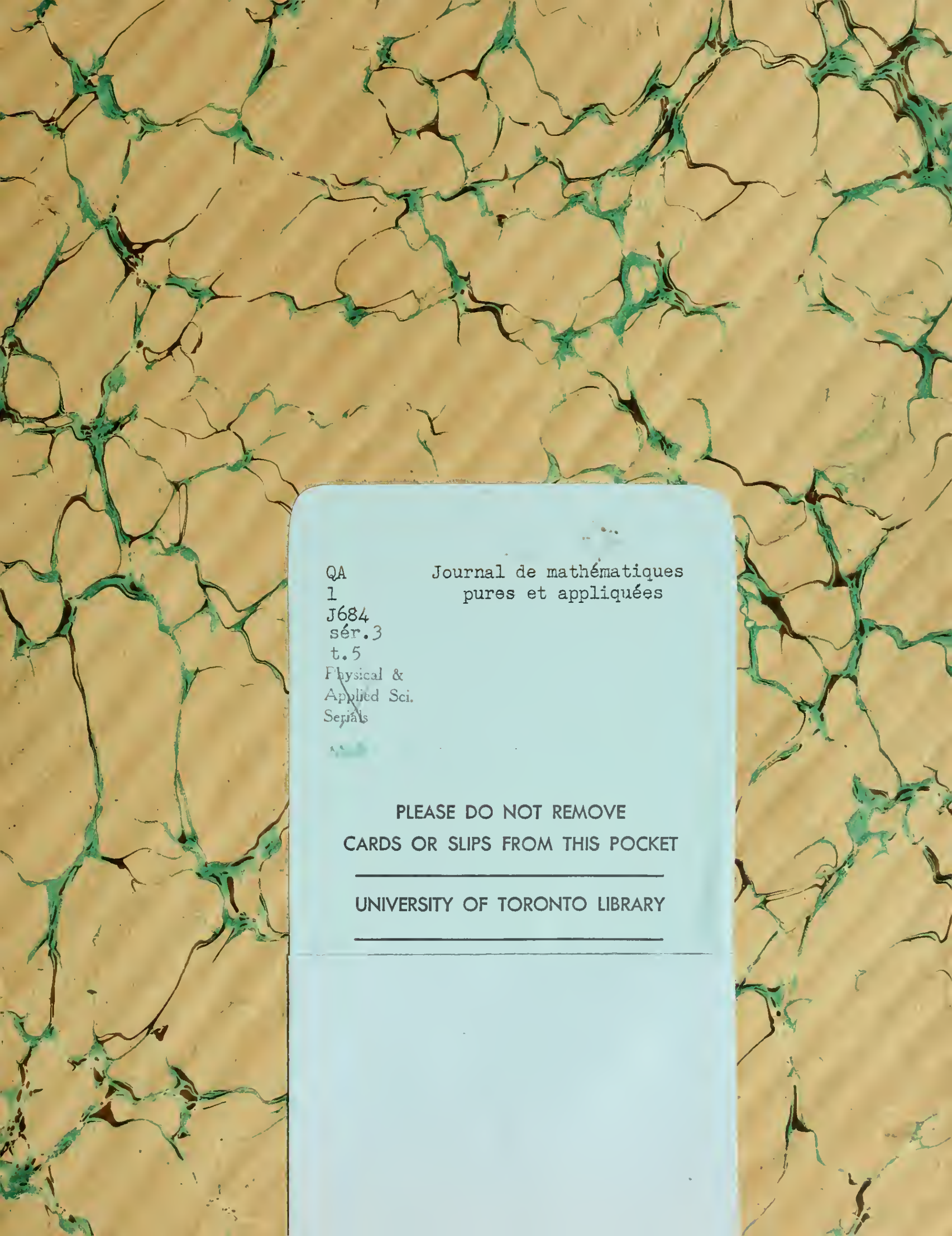
Gauthier-Villars, Editeu

Imp. P. Méa, r. des F^res St Bernard, 14, Paris

Cinématique et Dynamique des ondes courantes sur un sphéroïde liquide, par M. Guyou.







QA
1
J684
sér.3
t.5
Physical &
Applied Sci.
Serials
Journal de mathématiques
pures et appliquées
PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET
UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

